LIE-GRUPPEN UND HOMOGENE RÄUME

THILO KUESSNER

1. Topologie von Matrix-Gruppen

Für die Grundbegriffe aus der Theorie differenzierbarer Mannigfaltigkeiten verweisen wir auf den Anhang Abschnitt 7.2.

1.1. **Lie-Gruppen.**

1.1.1. *Definition.*

Definition 1. *Eine Lie-Gruppe ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit G, auf der eine Gruppenstruktur definiert ist, mit der die Gruppenmultiplikation*

$$m\colon G\times G\to G$$

und die Inversenbildung

$$i\colon G\to G$$

differenzierbare Abbildungen sind.

Hierbei ist die Differentialstruktur auf $G\times G$ diejenige, die durch die Produkte der Karten gegeben ist.

Lemma 1. *Wenn G eine Lie-Gruppe ist, dann sind für jedes $g\in G$ die Linksmultiplikation*

$$l_g\colon G\to G$$

und die Rechtsmultiplikation

$$r_g\colon G\to G$$

differenzierbare Abbildungen.

1.1.2. *Die allgemeine lineare Gruppe.* Wir werden im folgenden $Mat(n,\mathbb{R})$ mit der durch die Identifizierung $Mat(n,\mathbb{R})=\mathbb{R}^{n^2}$ gegebenen Topologie und alle Unterräume mit der Unterraumtopologie betrachten. Eine Folge von Matrizen A_n konvergiert also genau dann gegen A, wenn alle Einträge von A_n gegen die entsprechenden Einträge von A konvergieren.

Beispiel 1 *Allgemeine lineare Gruppe*
Die allgemeine lineare Gruppe

$$GL(n,\mathbb{R})=\{A\in Mat(n,\mathbb{R})\colon det(A)\neq 0\}$$

ist eine Lie-Gruppe.

Tatsächlich ist sie als offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n^2}$ eine n^2-dimensionale Mannigfaltigkeit. Die Multiplikation ist differenzierbar, weil jeder Eintrag von AB ein Polynom in den Einträgen von A und den Einträgen von B ist. Die Inversion ist differenzierbar, weil nach der Cramerschen Regel jeder Eintrag von A^{-1} der Quotient aus der Determinante einer Untermatrix und der Determinante von A ist und beide sind Polynome in den Einträgen von A.

Beispiel 2 *Allgemeine lineare Gruppe über* $\mathbb{C}$

Die allgemeine lineare Gruppe

$$GL(n,\mathbb{C}) = \{A \in Mat(n,\mathbb{C}) \colon det(A) \neq 0\}$$

ist eine Lie-Gruppe und eine abgeschlossene Untergruppe von $GL(2n,\mathbb{R})$.

Der Beweis der ersten Behauptung ist natürlich völlig analog zum vorhergehenden Beispiel. Für die zweite Behauptung beobachtet man, dass eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ genau dann $\mathbb{C}$-linear ist, wenn sie mit der Multiplikation mit i kommutiert. Letztere ist gegeben durch die Blockmatrix J, deren diagonale 2×2-Blöcke jeweils

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sind. Man kann $GL(n,\mathbb{C})$ also definieren durch die Gleichung $AJ = JA$. Explizit entspricht $GL(n,\mathbb{C})$ denjenigen $2n \times 2n$-Matrizen, deren 2×2-Blöcke von der Form

$$\begin{pmatrix} r_{ij}\cos\phi_{ij} & -r_{ij}\sin\phi_{ij} \\ r_{ij}\sin\phi_{ij} & r_{ij}\cos\phi_{ij} \end{pmatrix}$$

sind.

Weil $GL(n,\mathbb{R})$ und $GL(n,\mathbb{C})$ offene Teilmengen von $Mat(n,\mathbb{R})$ bzw. $Mat(n,\mathbb{C})$ sind, sind insbesondere ihre Tangentialräume mit $Mat(n,\mathbb{R})$ bzw. $Mat(n,\mathbb{C})$ zu identifizieren.

Definition 2. *Eine Matrix-Gruppe ist eine abgeschlossene Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{C})$ *für ein* $n \in \mathbb{N}$.

Wegen Beispiel 2 ist dies äquivalent dazu, dass die Gruppe eine abgeschlossene Untergruppe von $GL(n,\mathbb{R})$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist.

Lemma 2. *Wenn* G *eine Matrix-Gruppe ist, dann sind die Differentiale der Links- und Rechtsmultiplikation mit* $g \in G$ *gegeben durch*

$$D_A l_g(B) = gB, D_A r_g(B) = Bg.$$

Insbesondere ist $T_A G$ *das Bild von* $T_{\mathbb{1}} G$ *unter* $D_{\mathbb{1}} l_A$.

Beweis: Der Tangentialraum von $GL(n,\mathbb{R})$ in A ist $Mat(n,\mathbb{R})$, eine Matrix $B \in Mat(n,\mathbb{R})$ wird dabei repräsentiert durch die Kurve $A+tB$, die für hinreichend kleine t in $GL(n,\mathbb{R})$ verbleibt. Damit erhalten wir

$$D_A l_g(B) = \frac{d}{dt}|_{t=0} g(A+tB) = gB,$$

analog für die Rechtsmultiplikation. *QED*

1.1.3. *Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppe.*

Beispiel 3 *Die spezielle lineare Gruppe*

$$SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \colon det(A) = 1\}$$

und

$$SL(n,\mathbb{C}) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) \colon det(A) = 1\}$$

sind Lie-Gruppen, ihre Tangentialräume in $\mathbb{1}$ bestehen aus allen (reellen oder komplexen) Matrizen der Spur 0.

Wir beweisen dies für den reellen Fall, der Beweis im komplexen Fall ist völlig analog.

Aus dem Entwicklungssatz von Laplace folgt, dass die partielle Ableitung von det nach a_{ij} gerade $(-1)^{i+j}det(A_{ij})$ ist, wobei A_{ij} die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte aus A entstehende Matrix ist. Das selbe gilt natürlich auch für die partiellen Ableitungen von $(det - 1)$.

Damit ist $(det - 1)$ in jedem Punkt von $SL(n, \mathbb{R})$ eine Submersion, denn aus $det(A_{ij}) = 0$ für alle i, j würde mit dem Entwicklungssatz $det(A) = 0$ folgen.

Mithin ist $SL(n, \mathbb{R})$ eine $(n^2 - 1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Als Einschränkungen differenzierbarer Abbildungen sind Multiplikation und Inversion natürlich wieder differenzierbar.

Den Tangentialraum in $\mathbb{1}$ berechnen wir mit Satz 19, also als Kern des Differentials von $(det - 1)$ in $\mathbb{1}$.

Sei e_{ij} die Matrix, die an der Stelle (i, j) den Eintrag 1 und überall sonst den Eintrag 0 hat. Dann ist

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}(det(\mathbb{1} + te_{ij}) - 1) = \delta_{ij}.$$

Für eine beliebige Matrix $B = \sum_{i,j} b_{ij}e_{ij}$ erhalten wir damit

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}(det(\mathbb{1} + tB) = \sum_{i,j} b_{ij}\delta_{ij} = Spur(B).$$

Also besteht der Tangentialraum in $\mathbb{1}$ aus allen Matrizen der Spur 0.

Satz 1. (Satz von Cartan) *Abgeschlossene Untergruppen einer Lie-Gruppe sind Untermannigfaltigkeiten und damit Lie-Gruppen.*

Beweis: Einen Beweis findet man in *Elie Cartan: La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis Situs. Mémorial Sc. Math. XLII, pp. 1-61 (1930)* oder für Matrixgruppen bereits in *John von Neumann: Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen. Math. Z. 30 (1929), no. 1, 3-42.* Weil wir den allgemeinen Beweis hier nicht ausführen wollen, geben wir im Folgenden für die uns interessierenden Beispiele einen direkten Beweis. *QED*

Beispiel 4 *Orthogonale und unitäre Gruppen*

Die orthogonale Gruppe

$$O(n) = \left\{A \in GL(n, \mathbb{R})\colon AA^T = \mathbb{1}\right\}$$

ist eine Lie-Gruppe mit Tangentialraum

$$T_{\mathbb{1}}O(n) = \left\{H \in Mat(n, \mathbb{R})\colon H + H^T = 0\right\}.$$

Zum Beweis betrachten wir die durch

$$f(A) = ((AA^T)_{ij} - \delta_{ij})_{1 \le i \le j \le n}$$

definierte Abbildung

$$f\colon Mat(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

deren Kern gerade $O(n)$ ist, denn wegen der Symmetrie von AA^T genügt es, die Bedingung $(AA^T)_{ij} = \delta_{ij}$ für $i \le j$ nachzuprüfen.

Durch Differenzieren von f erhält man

$$D_B f(H) = HB^T + BH^T.$$

Für ein Paar (i,j) betrachten wir die Matrix K, deren Einträge an den Stellen (i,j) und (j,i) jeweils 1 und sonst alle 0 sind. Dann ist für $B \in O(n)$

$$D_B f(KB) = KBB^T + BB^T K^T = K + K^T = 2\delta_{ij}.$$

Damit liegen alle Basisvektoren δ_{ij} im Bild von $D_B f$, womit dieses Differential surjektiv ist. Mithin ist $O(n)$ eine Mannigfaltigkeit und man prüft leicht nach, dass es unter den Gruppenoperationen abgeschlossen ist. Die Formel für den Tangentialraum $T_{\mathbb{1}} O(n)$ folgt aus

$$D_{\mathbb{1}} f(H) = H + H^T.$$

Analog beweist man, dass die spezielle orthogonale Gruppe

$$SO(n) = \left\{A \in GL(n,\mathbb{R})\colon AA^T = \mathbb{1}, det(A) = 1\right\}$$

eine Lie-Gruppe mit Tangentialraum

$$T_{\mathbb{1}} O(n) = \left\{H \in Mat(n,\mathbb{R})\colon H + H^T = 0, Spur(H) = 0\right\},$$

die unitäre Gruppe

$$U(n) = \left\{A \in GL(n,\mathbb{C})\colon A\overline{A}^T = \mathbb{1}\right\}$$

eine Lie-Gruppe mit Tangentialraum

$$T_{\mathbb{1}} U(n) = \left\{H \in Mat(n,\mathbb{C})\colon H + \overline{H}^T = 0\right\},$$

und die spezielle unitäre Gruppe

$$SU(n) = \left\{A \in GL(n,\mathbb{C})\colon A\overline{A}^T = \mathbb{1}, det(A) = 1\right\}$$

eine Lie-Gruppe mit Tangentialraum

$$T_{\mathbb{1}} O(n) = \left\{H \in Mat(n,\mathbb{C})\colon H + \overline{H}^T = 0, Spur(H) = 0\right\}$$

ist.

Beispiel 5 *Indefinite orthogonale und unitäre Gruppen*

Für ganze Zahlen $p,q > 0$ mit $p + q = n$ sei

$$I_{p,q} = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{p}, \underbrace{-1,\ldots,-1}_{q})$$

die Diagonalmatrix mit p bzw. q Einträgen 1 und -1. Dann definieren wir

$$O(p,q) = \left\{A \in GL(n,\mathbb{R})\colon AI_{p,q}A^T = I_{p,q}\right\}$$

und

$$U(p,q) = \left\{A \in GL(n,\mathbb{R})\colon AI_{p,q}\overline{A}^T = I_{p,q}\right\},$$

sowie

$$SO(p,q) = O(p,q) \cap SL(n,\mathbb{R}) \text{ und } SU(p,q) = U(p,q) \cap SL(n,\mathbb{C}).$$

Analog zu Beispiel 4 erhalten wir

$$T_{\mathbb{1}} O(p,q) = \left\{H \in Mat(n,\mathbb{R})\colon H^T I_{p,q} + I_{p,q} H = 0\right\}$$

und

$$T_{\mathbb{1}} U(p,q) = \left\{H \in Mat(n,\mathbb{R})\colon \overline{H}^T I_{p,q} + I_{p,q} H = 0\right\},$$

sowie

$$T_{\mathbb{1}} SO(p,q) = T_{\mathbb{1}} O(p,q) \cap T_{\mathbb{1}} SL(n,\mathbb{R}) \text{ und } T_{\mathbb{1}} SU(p,q) = T_{\mathbb{1}} U(p,q) \cap T_{\mathbb{1}} SL(n,\mathbb{C}).$$

1.2. **Topologie klassischer Lie-Gruppen.**

1.2.1. *Kompaktheit.*

Satz 2.
$$O(n), SO(n), U(n), SU(n)$$
sind kompakt,
$$GL(n,\mathbb{R}), SL(n,\mathbb{R}), GL(n,\mathbb{C}), SL(n,\mathbb{C})$$
sowie für $p, q \geq 1$
$$O(p,q), SO(p,q), U(p,q), SU(p,q)$$
sind nicht kompakt.

Beweis: Die Spalten einer orthogonalen Matrix haben Norm 1 und stehen senkrecht aufeinander, mithin hat die gesamte Matrix als Element von $\mathbb{R}^{n^2}$ die Norm $\sqrt{n}$. Insbesondere bilden die orthogonalen Matrizen eine beschränkte Teilmenge und als Lösungsmenge polynomieller Gleichungen in den Einträgen auch eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n^2}$, woraus Kompaktheit folgt. Ähnlich beweist man die Kompaktheit von $SO(n), U(n)$ und $SU(n)$.

$SL(n,\mathbb{R})$ und alle sie enthaltenden Gruppen enthalten beispielsweise die Folge der Diagonalmatrizen $diag(m, 1, 1, \ldots, 1, \frac{1}{m})$, die nicht beschränkt ist und keine konvergente Teilfolge enthält.

$SO(1,1)$ besteht aus Matrizen der Form $\begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$, die ebenfalls eine unbeschränkte Menge bilden. Damit können weder $SO(1,1)$ noch die sie enthaltenden Gruppen $O(p,q), SO(p,q), U(p,q), SU(p,q)$ kompakt sein.

QED

1.2.2. *Zusammenhang.*

Satz 3. *$GL(n,\mathbb{R})$ und $O(n)$ sind nicht wegzusammenhängend,*
$$SL(n,\mathbb{R}), GL(n,\mathbb{C}), SL(n,\mathbb{C}), SO(n), U(n), SU(n)$$
sind wegzusammenhängend.

Beweis: Die Determinante ist eine stetige Funktion, weshalb sich zum Beispiel $\mathbb{1}$ und die Diagonalmatrix $diag(-1, 1, \ldots, 1)$ in $GL(n,\mathbb{R})$ oder $O(n)$ nicht durch einen stetigen Weg verbinden lassen, denn entlang diesem änderte sich die Determinante stetig von 1 zu -1, wobei sie nach dem Zwischenwertsatz den Wert 0 durchlaufen müßte.

Wir beweisen jetzt, dass $SO(n)$ wegzusammenhängend ist. Für $n = 2$ zeigt Lemma 78, dass jede Matrix von der Form
$$\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$
ist. $SO(2)$ ist also homöomorph (mit etwas mehr Arbeit sogar diffeomorph) zum Kreis und damit wegzusammenhängend. Insbesondere lässt sich in $SO(n)$ jede Matrix der Form $B^{-1}RB$ mit $R \in SO(2) \subset SO(n)$ durch einen stetigen Weg mit der Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ verbinden. Dies gilt dann auch für Produkte dieser Drehungen. Nach Lemma 79 lässt sich aber jede Matrix aus $SO(n)$ als Produkt von Drehmatrizen darstellen und somit durch einen stetigen Weg mit $\mathbb{1}$ verbinden.

$SL(n,\mathbb{R})$ ist homotopieäquivalent zu $SO(n)$ und damit ebenfalls wegzusammenhängend. Dies folgt aus der Polarzerlegung (Lemma 76), mit der man jede Matrix aus $GL(n,\mathbb{R})$ auf eindeutige Weise als Produkt aus einer Matrix aus $O(n)$

und einer positiv definiten, symmetrischen Matrix zerlegen kann. Die positiv definiten Matrizen, symmetrischen Matrizen bilden einen kontrahierbaren Raum mit der Homotopie zwischen Identität und konstanter Abbildung gegeben durch

$$H_t(P) = t\mathbb{1} + (1-t)P.$$

Die Polarzerlegung liefert also eine Deformationsretraktion von $GL(n,\mathbb{R})$ auf $O(n)$.

Entsprechend bekommen wir mit Lemma 76 eine Deformationsretraktion von $SL(n,\mathbb{R})$ auf $SO(n)$, wobei die Homotopie hier durch

$$H_t(P) = \frac{t\mathbb{1} + (1-t)P}{det(t\mathbb{1} + (1-t)P)}$$

definiert wird.

Wir beweisen jetzt, dass $U(n)$ wegzusammenhängend ist. Das ergibt sich mit im Prinzip demselben, aber einfacheren Beweis wie bei $SO(n)$: jede Matrix aus $U(n)$ ist konjugiert zu einer Diagonalmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} e^{i\phi_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\phi_2} & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & e^{i\phi_n} \end{pmatrix},$$

die sich durch die Homotopie $H_t(\phi_1,\ldots,\phi_n) = (t\phi_1,\ldots,t\phi_n)$ in die Einheitsmatrix überführen lässt.

Aus einem ähnlichen Grund ist $SU(n)$ wegzusammenhängend. Hier hat man als zusätzliche Bedingung an die Matrix die Gleichung $\phi_1 + \ldots + \phi_n = 0$ und diese gilt dann aber automatisch auch für $(t\phi_1,\ldots,t\phi_n)$.

$GL(n,\mathbb{C})$ ist homotopieäquivalent zu $U(n)$, dies sieht man wieder mit der Polarzerlegung (Lemma 77) von Matrizen in $GL(n,\mathbb{C})$ als Produkt aus einer unitären und einer positiv definiten, hermiteschen Matrix. Die Einschränkung dieser Deformationsretraktion auf $SL(n,\mathbb{C})$ gibt (nach Division durch die Determinante) wieder eine Homotopieäquivalenz zwischen $SL(n,\mathbb{C})$ und $SU(n)$, womit $SL(n,\mathbb{C})$ ebenfalls wegzusammenhängend ist. *QED*

1.2.3. *Beziehungen zwischen kompakten Lie-Gruppen.* Die Reihen kompakter Gruppen

$$O(1) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, O(2), O(3), O(4), \ldots$$
$$SO(1) = 1, SO(2), SO(3), SO(4), \ldots$$
$$U(1) = S^1, U(2), U(3), \ldots$$
$$SU(1) = 1, SU(2), SU(3), \ldots$$

sind in Mathematik und Physik von großer Bedeutung. In diesem Abschnitt geht es um Beziehungen zwischen unterschiedlichen Gruppen aus diesen Reihen.

Lemma 3. *Man hat Diffeomorphismen*

$$O(n) \cong SO(n) \times S^0, U(n) \cong SU(n) \times S^1.$$

Beweis: Jede Matrix $A \in U(n)$ lässt sich eindeutig zerlegen als $A = BC$ mit $C = diag(det(A), 1, \ldots, 1)$ und $B = AC^{-1}$, wobei $B \in SU(n)$ und $det(A) \in S^1$. Entsprechend bekommt man eine Zerlegung für $A \in O(n)$ mit $B \in SO(n)$ und $det(A) \in S^0$. *QED*

Dagegen gibt es zwischen orthogonalen und unitären Gruppen Beziehungen nur in niedrigen Dimensionen.

Lemma 4. *Es gibt einen Isomorphismus*

$$U(1) \cong SO(2).$$

Beweis: Wir haben

$$U(1) = \left\{ (e^{i\phi}) \colon \phi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \right\}$$

und mit Lemma 78

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} : \phi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \right\}.$$

Aus den Additionstheoremen für Winkelfunktionen ergibt sich, dass die Bijektion

$$(e^{i\phi}) \to \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

ein Homomorphismus ist. *QED*

Die einfachsten nicht-abelschen Lie-Gruppen sind $SU(2)$ und $SO(3)$, die eng miteinander zusammenhängen.

Proposition 1. *Es gibt einen surjektiven Homomorphismus*

$$Ad \colon SU(2) \to SO(3)$$

mit $ker(Ad) = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$.

Beweis: Der Beweis verwendet in einem konkreten Spezialfall zahlreiche der später allgemein einzuführenden Konzepte aus der Theorie der Lie-Gruppen.

Wir skizzieren zunächst die hinter dem Beweis stehenden allgemeinen Konzepte und werden sie dann in diesem Spezialfall ausführen. Allgemein hat man zu einer Lie-Gruppe G stets eine sogenannte Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, die als Vektorraum einfach der Tangentialraum im neutralen Element ist. Im Fall $G = SU(2)$ hat man also

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ X \in Mat(2, \mathbb{C}) \colon X + \overline{X}^T = 0, Spur(X) = 0 \right\}.$$

Es gibt dann allgemein die sogenannte adjungierte Wirkung, einen Homomorphismus

$$Ad \colon G \to GL(\mathfrak{g}),$$

im Fall des dreidimensionalen Vektorraums $\mathfrak{su}(2)$ also

$$Ad \colon SU(2) \to GL(3, \mathbb{R}).$$

Im Fall von Matrizengruppen ist diese adjungierte Wirkung einfach durch $Ad(A)(X) = AXA^{-1}$ gegeben und ihre Ableitung ist $ad(A)(Y) = [A, Y] = AYA^{-1}Y^{-1}$. Weiterhin gibt es auf jeder Lie-Algebra die sogenannte Killing-Form, eine symmetrische Bilinearform, die unter der adjungierten Wirkung invariant ist. Im Fall kompakter Lie-Gruppen ist das Negative dieser symmetrischen Bilinearform sogar ein Skalarprodukt. Wenn wir mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine orthonormale Basis bzgl. dieses Skalarproduktes wählen, dann ist in dieser Basis eine das Skalarprodukt erhaltende Abbildung durch eine Matrix aus $SO(3)$ repräsentiert. Wir erhalten also einen Homomorphismus

$$Ad \colon SU(2) \to SO(3).$$

Wir werden dann noch beweisen müssen, dass Ad surjektiv ist und der Kern nur aus $\pm\mathbb{1}$ besteht.

Wir führen den Beweis jetzt im Detail durch. Wir betrachten den Vektorraum

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ X \in Mat(2, \mathbb{C}) \colon X + \overline{X}^T = 0, Spur(X) = 0 \right\}$$

mit der "Killing-Form"

$$\langle X,Y\rangle = 4\ Spur(XY).$$

Weil die Spur eine lineare Abbildung ist, ist die Killing-Form bilinear. Wegen $Spur(XY) = Spur(YX)$ ist sie auch symmetrisch. Aus $X + \overline{X}^T = 0$ folgt, dass die Eigenwerte λ_1, λ_2 von $X \in \mathfrak{su}(2)$ die Gleichung $\lambda_k + \overline{\lambda_k} = 0$ erfüllen, also rein imaginär sind und demzufolge negative Quadrate haben. Insbesondere ist

$$\langle X,X\rangle = 4Spur(X^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 < 0.$$

Die Killing-Form ist also negativ definit und die symmetrische Bilinearform

$$B(X,Y) := -4Spur(XY)$$

ist ein Skalarprodukt.

Wir betrachten nun die durch

$$Ad(A)\colon X \to AXA^{-1}$$

für $A \in SU(2), X \in \mathfrak{su}(2)$ definierte Wirkung der Gruppe $SU(2)$ auf dem 3-dimensionalen Vektorraum $\mathfrak{su}(2)$. Wir bemerken, dass diese tatsächlich $\mathfrak{su}(2)$ auf sich abbildet, denn aus $X + \overline{X}^T = 0$ und $A\overline{A}^T = \mathbb{1}$ folgt

$$AXA^{-1} + \overline{AXA^{-1}}^T = AXA^{-1} + (\overline{A}^T)^{-1}\overline{XA}^T = AXA^{-1} + A\overline{X}A^{-1} = A(X + \overline{X}^T)A^{-1} = 0$$

und aus $Spur(X) = 0$ folgt $Spur(AXA^{-1}) = 0$.

Wir beobachten, dass die Wirkung von Ad das Skalarprodukt B invariant lässt. Dies folgt aus

$$B(Ad(A)X, Ad(A)Y) = B(AXA^{-1}, AYA^{-1}) = -4\ Spur(AXA^{-1}AYA^{-1})$$
$$= -4Spur(AXYA^{-1}) = -4Spur(XY) = B(X,Y).$$

Somit erhalten wir nach Wahl einer Orthonormalbasis $Ad(A) \in SO(3)$. (Unterschiedliche Basen geben durch einen Basiswechsel konjugierte Darstellungen.) Die so definierte Abbildung

$$Ad\colon SU(2) \to SO(3)$$

ist offensichtlich ein Homomorphismus.

Sei $A \in ker(Ad)$, d.h. $Ad(A) = \mathbb{1}$. Dann gilt $Ad(A)(X) = X$ für alle $X \in \mathfrak{su}(2)$. Wegen $Ad(A)(X) = AXA^{-1}$ bedeutet das, dass $A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix}$ mit allen Matrizen $X \in \mathfrak{su}(2)$ kommutiert, insbesondere auch mit $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, woraus durch Nachrechnen $z_2 = 0$ folgt. Weiterhin muss A mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ kommutieren, woraus $z_1 = \overline{z_1}$ folgt. Zusammen mit $\parallel z_1 \parallel^2 = \parallel z_1 \parallel^2 + \parallel z_2 \parallel^2 = 1$ folgt daraus $z_1 = \pm 1$. Also besteht der Kern von Ad nur aus den Matrizen $\mathbb{1}$ und $-\mathbb{1}$.

Um die Surjektivität zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass das Bild von Ad offen und abgeschlossen ist - weil $SO(3)$ zusammenhängend ist, muss das Bild dann ganz $SO(3)$ sein.

Weil $SU(2)$ kompakt ist, ist auch sein Bild unter Ad kompakt und damit jedenfalls eine abgeschlossene Teilmenge von $SO(3)$.

Um die Offenheit des Bildes zu sehen, zeigen wir dass Ad ein lokaler Diffeomorphismus ist. Man kann nachrechnen, dass das Differential von $Ad\colon SU(2) \to SO(\mathfrak{su}(2))$ in $\mathbb{1}$ die durch

$$ad(A)(X) := [A,X] = AXA^{-1}X^{-1}$$

gegebene lineare Abbildung

$$ad\colon \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(\mathfrak{su}(2))$$

ist. Diese Abbildung lässt sich in einer Basis des 3-dimensionalen Vektorraumes $\mathfrak{su}(2)$ explizit berechnen und sie hat insbesondere $det(ad) \neq 0$, womit also Ad ein lokaler Diffeomorphismus in $\mathbb{1}$ ist. Die Berechnung des Differentials von Ad in einem beliebigen $g \in SU(2)$ lässt sich mittels Linkstranslation l_g auf die in $\mathbb{1}$ zurückführen und hat dann also ebenfalls von 0 verschiedene Determinante. *QED*

Weil $SU(2)$ nach Korollar 21 die 3-dimensionale Sphäre und insbesondere einfach zusammenhängend ist, folgt daraus $\pi_1 SO(3) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Aus der Faserung

$$SO(n-1) \to SO(n) \to S^{n-1}$$

bekommt man dann mit $\pi_1 S^{n-1} = 0$ durch vollständige Induktion, dass für alle $n \geq 3$

$$\pi_1 SO(n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

gilt. Die universelle Überlagerung von $SO(n)$ ist die sogenannte Spin-Gruppe $Spin(n)$. Insbesondere ist also $Spin(3) = SU(2)$.

1.3. **Exponential von Matrizen.**

Proposition 2. *Für jede Matrix $A \in Mat(m, \mathbb{C})$ konvergiert die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

in $Mat(m, \mathbb{C})$.

Beweis: Bekanntlich konvergiert für $x \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ gegen e^x, insbesondere bilden die Partialsummen eine Cauchy-Folge.

Wir verwenden eine beliebige vollständige Norm auf $Mat(m, \mathbb{C})$, beispielsweise

$$\| A \| = \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} \| a_{ij} \|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Um Konvergenz in dieser Norm zu beweisen, genügt es zu überprüfen, dass die Partialsummen eine Cauchy-Folge bilden.

Weil die $e^{\|A\|}$ definierende Potenzreihe konvergiert gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{n=k}^{l} \frac{1}{n!} \| A \|^n < \epsilon$$

für alle $k, l > N$. Mit der Dreiecksungleichung und der Submultiplikativität der Norm folgt daraus

$$\| \sum_{n=k}^{l} \frac{1}{n!} A^n \| < \epsilon$$

für alle $k, l > N$. Die Partialsummen bilden also eine Cauchy-Folge, woraus wegen der Vollständigkeit der Norm Konvergenz folgt. *QED*

Definition 3. *Das Exponential e^A oder $exp(A)$ einer Matrix $A \in Mat(n, \mathbb{C})$ wird definiert durch*

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \in Mat(n, \mathbb{C}).$$

Beispiel 6 *Exponential von Diagonalmatrizen*
Das Exponential einer Diagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & & & 0 \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ist die Diagonalmatrix

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & & & 0 \\ 0 & 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Beispiel 7 *Exponential diagonalisierbarer Matrizen*
Sei A eine diagonalisierbare Matrix, also $A = BDB^{-1}$ mit einer Diagonalmatrix D und einer invertierbaren Matrix $B \in GL(n, \mathbb{C})$. Dann ist

$$e^A = Be^D B^{-1},$$

denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $(BDB^{-1})^n = BD^n B^{-1}$.

Beispiel 8 *Exponential von Dreiecksmatrizen*
Sei A eine Dreiecksmatrix, d.h. alle Einträge a_{ij} mit $i > j$ seien Null. Dann ist e^A ebenfalls eine Dreiecksmatrix, weil dies für alle A^n mit $n \geq 0$ gilt.

Weiterhin sind die Diagonaleinträge von e^A gerade die Exponentialfunktionen der Diagonaleinträge von A, denn die Diagonaleinträge der n-ten Potenzen sind die n-ten Potenzen der Diagonaleinträge von A.

Beispiel 9 *Exponential in $SO(1,1)$*
Für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$exp(A) = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist

$$exp \colon T_{\mathbb{1}} SO(1,1) \to SO(1,1)$$

surjektiv.

Beispiel 10 *Exponential in $SO(2)$*
Für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$exp(A) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist

$$exp \colon T_{\mathbb{1}} SO(2) \to SO(2)$$

surjektiv.

Beispiel 11 *Nicht-Surjektivität der Exponentialabbildung*
Es gibt keine Matrix $A \in Mat(2, \mathbb{R})$ mit

$$exp(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich könnte wegen Beispiel 7 eine solche Matrix A nicht diagonalisierbar sein, müsste also einen doppelten Eigenwert λ haben. Dieser Eigenwert wäre notwendig reell, weil die komplexen Eigenwerte einer reellen Matrix in komplex konjugierten Paaren kommen. Mit Beispiel 8, angewandt auf die Jordansche Normalform von A, sehen wir, dass e^λ ein doppelter Eigenwert von $exp(A)$ ist. Aus $\lambda \in \mathbb{R}$ folgt aber $e^\lambda > 0$ und insbesondere $e^\lambda \neq -1$.

Lemma 5. *Für $A \in Mat(n, \mathbb{C})$ ist*

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} e^{tA} = A.$$

Beweis: Potenzreihen können in ihrem Konvergenzkreis summandenweise differenziert werden. e^{tA} ist eine Potenzreihe in der Variablen $t \in \mathbb{R}$ und aus Proposition 2 folgt, dass der Konvergenzkreis von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} t^n$ ganz $\mathbb{R}$ ist. *QED*

Lemma 6. *Für $A \in Mat(n, \mathbb{C})$ ist*

$$Det(e^A) = e^{Spur(A)}.$$

Beweis: Wenn die Behauptung für eine Matrix A zutrifft, dann gilt sie wegen Beispiel 7 auch für jede ähnliche Matrix. Es genügt also, die Behauptung für Matrizen in Jordanscher Normalform nachzuprüfen. Seien $d_1, \ldots, d_n$ die Diagonaleinträge einer Matrix in Jordanscher Normalform, dann ist $Spur(A) = d_1 + \ldots + d_n$. Andererseits folgt aus Beispiel 8, dass das Exponential der Jordan-Form eine Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $e^{d_1}, \ldots, e^{d_n}$ ist. Insbesondere ist die Determinante $e^{d_1} \ldots e^{d_n}$, woraus die Behauptung folgt. *QED*

Lemma 7. *Wenn für Matrizen $A, B \in Mat(n, \mathbb{C})$*

$$AB = BA$$

gilt, dann ist

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Beweis: Die Idee ist, dass wir wegen $AB = BA$ die binomische Formel auf Potenzen von $A + B$ anwenden können. Insbesondere ist

$$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(A+B)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Um zu beweisen, dass die e^{A+B} definierende Konvergenzreihe gegen das Produkt $e^A e^B$ konvergiert, schätzen wir die Differenz aus der $2m$-ten Partialsumme von e^{A+B} und dem Produkt der m-ten Partialsummen von e^A und e^B ab und erhalten

$$\| \sum_{n=0}^{2m} \frac{1}{n!}(A+B)^n - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{l!} B^l \| = \| \sum_{k+l=2m, k>m \text{ oder } l>m} \frac{A^k}{k!} \frac{B^l}{l!} \|$$

$$\leq \sum_{k+l=2m, k>m \text{ oder } l>m} \frac{\| A \|^k}{k!} \frac{\| B \|^l}{l!}.$$

Weil $\sum_{k=m+1}^{2m}\frac{\|A\|^k}{k!}$ und $\sum_{l=m+1}^{2m}\frac{\|A\|^l}{l!}$ Nullfolgen und die Reihen insgesamt absolut konvergent sind, ist auch

$$\sum_{k+l=2m,k>m \text{ oder } l>m}\frac{\| A \|^k}{k!}\frac{\| B \|^l}{l!}$$

eine Nullfolge. *QED*

Korollar 1. *Für jede Matrix $A \in Mat(n,\mathbb{C})$ ist e^A invertierbar mit*

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}.$$

Beweis: Das folgt aus Lemma 7 mit $B = -A$. *QED*

Proposition 3. *Die Abbildung*

$$exp\colon Mat(n,\mathbb{C}) \to GL(n,\mathbb{C})$$

ist ein lokaler Diffeomorphismus einer Umgebung von 0 auf eine Umgebung von $\mathbb{1}$.

Beweis: Aus Lemma 5 folgt $D_0exp = id$, insbesondere ist D_0exp eine Bijektion. *QED*

Lemma 8. *Für $A \in Mat(m,\mathbb{C})$ mit $\| A - \mathbb{1} \| < 1$ konvergiert die Reihe*

$$log(A) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m}(A-\mathbb{1})^m$$

und es gilt $e^{log(A)} = A$.

Beweis: Die Reihe konvergiert absolut, denn

$$\sum_{m=1}^{\infty} \| \frac{(-1)^{m+1}}{m}(A-\mathbb{1})^m \| = \sum_{m=1}^{\infty} \| \frac{1}{m}(A-\mathbb{1})^m \|$$

wird majorisiert von der geometrischen Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} \| (A-\mathbb{1}) \|^m$, die wegen $\| A - \mathbb{1} \| < 1$ konvergiert.

Wir zeigen jetzt $e^{log(A)} = A$. Das ist klar für Diagonalmatrizen und damit auch für diagonalisierbare Matrizen.

Aus dem Satz über die Jordansche Normalform folgt, dass es zu jeder Matrix A eine Folge diagonalisierbarer Matrizen mit $\lim_{k\to\infty} A_k = A$ gibt. Beispielsweise ist ein Jordan-Block der Größe n mit Eigenwert λ der Grenzwert der Folge A_k von Matrizen mit Diagonaleinträgen $\lambda, \lambda+\frac{1}{k}, \ldots, \lambda+\frac{n-1}{k}$ und Einsen direkt über der Diagonale sowie Nullen sonst. Diese Matrix hat charakteristisches Polynom $(x-\lambda)\ldots(x-(\lambda+\frac{n-1}{k}))$ und demzufolge n verschiedene Eigenwerte, ist also diagonalisierbar.

Aus der gleichmäßigen absoluten Konvergenz folgt insbesondere die Stetigkeit des Logarithmus und der Exponentialfunktion. Mithin überträgt sich $e^{log(A)} = A$ auch auf Grenzwerte diagonaliserbarer Matrizen, mithin auf beliebige Matrizen. *QED*

Lemma 9. *Für alle $A, B \in Mat(m,\mathbb{C})$ gilt*

$$e^{A+B} = \lim_{n\to\infty}(e^{\frac{A}{n}}e^{\frac{B}{n}})^n.$$

Beweis: Wir multiplizieren die Reihen für $e^{\frac{A}{n}}$ und $e^{\frac{B}{n}}$ und erhalten

$$e^{\frac{A}{n}} e^{\frac{B}{n}} = \mathbb{1} + \frac{A}{n} + \frac{B}{n} + O(\frac{1}{n^2}).$$

Insbesondere ist

$$\| e^{\frac{A}{n}} e^{\frac{B}{n}} - \mathbb{1} \|^2 = O(\frac{1}{n^2}).$$

Andererseits folgt aus der Definition des Logarithmus

$$\log X - (X - \mathbb{1}) = O(\| X - \mathbb{1} \|)^2$$

und insbesondere

$$\log e^{\frac{A}{n}} e^{\frac{B}{n}} - (e^{\frac{A}{n}} e^{\frac{B}{n}} - \mathbb{1}) = O(\| e^{\frac{A}{n}} e^{\frac{B}{n}} - \mathbb{1} \|^2) = O(\frac{1}{n^2}).$$

Zusammen mit der ersten Gleichung gibt das nun

$$\| \log e^{\frac{A}{n}} e^{\frac{B}{n}} - (\frac{A}{n} + \frac{B}{n}) \| = O(\frac{1}{n^2}),$$

woraus

$$\| n \log e^{\frac{A}{n}} e^{\frac{B}{n}} - (A + B) \| = O(\frac{1}{n})$$

und mithin

$$\lim_{n\to\infty} n \log e^{\frac{A}{n}} e^{\frac{B}{n}} = A + B,$$

also

$$\lim_{n\to\infty} (e^{\frac{A}{n}} e^{\frac{B}{n}})^n = e^{A+B}$$

folgt. *QED*

1.4. **Lie-Algebra von Matrixgruppen.**

Definition 4. *Für eine abgeschlossene Untergruppe $G \subset GL(N, \mathbb{C})$ definieren wir ihre Lie-Algebra durch*

$$\mathfrak{g} = \left\{ A \in Mat(n, \mathbb{C})\colon e^{tA} \in G \ \forall\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Beispiel 12 *Lie-Algebra der speziellen linearen Gruppe*
Für $G = SL(n, \mathbb{C})$ ist

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{ A \in Mat(n, \mathbb{C})\colon Spur(A) = 0 \}.$$

Einerseits folgt aus $A \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, also $Spur(A) = 0$, mit Lemma 6 dass

$$det(e^{tA}) = e^{Spur(tA)} = e^{t\ Spur(A)} = 1,$$

also $e^{tA} \in SL(n, \mathbb{C})$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Umgekehrt folgt aus $e^{tA} \in SL(n, \mathbb{C})$, also $det(e^{tA}) = 1$, mit derselben Formel dass

$$Spur(tA) \in 2\pi i \mathbb{Z}$$

gelten muss. Aus $Spur(A) = 2k\pi i$ folgt aber $Spur(tA) = 2tk\pi i$ und weil das für alle $t \in \mathbb{R}$ ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ sein soll, muss $k = 0$ sein. Mithin ist $A \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

Beispiel 13 *Lie-Algebra der unitären Gruppe*
Für $G = U(n)$ ist

$$\mathfrak{u}(n) = \left\{ A \in Mat(n, \mathbb{C})\colon A + \overline{A}^T = 0 \right\}.$$

Einerseits folgt aus $A \in \mathfrak{u}(n)$, also $\overline{A}^T = -A$, dass $tA\overline{tA}^T = -t^2A^2 = \overline{tA}^T tA$ und demzufolge mit Lemma 7 dass

$$e^{tA}\overline{e^{tA}}^T = e^{tA}e^{t\overline{A}^T} = e^{t(A+\overline{A}^T)} = e^0 = 1,$$

also $e^{tA} \in U(n)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Wenn umgekehrt $e^{tA} \in U(n)$, also

$$e^{t\overline{A}^T} = \overline{e^{tA}}^T = (e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, dann erhält man durch Ableiten nach t in 0 mit Lemma 5 dass

$$\overline{A}^T = -A,$$

mithin $A \in \mathfrak{u}(n)$.

Aus den Beweisen der letzten beiden Beispielen ergeben sich auch die Lie-Algebren für $SL(n,\mathbb{R}), O(n), SO(n)$ und $SU(n)$.

Definition 5. *Eine (abstrakte) Lie-Algebra ist ein Vektorraum V mit einer bilinearen Verknüpfung*

$$[.,.] : V \times V \to V,$$

die die folgenden Bedingungen erfüllt: (i) für alle $X, Y \in V$ gilt

$$[X,Y] + [Y,X] = 0,$$

(ii) für alle $X, Y, Z \in V$ gilt

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0.$$

Bedingung (i) heißt Antikommutativität und Bedingung (ii) die Jacobi-Identität.

Definition 6. *Für Matrizen $A, B \in Mat(n,\mathbb{R})$ definieren wir ihren Kommutator $[A,B] \in Mat(n,\mathbb{R})$ durch*

$$[A,B] = AB - BA.$$

Lemma 10. *Für $A, B \in Mat(n,\mathbb{R})$ ist*

$$[A,B] = \frac{d}{dt}|_{t=0}(e^{tA}Be^{-tA}).$$

Beweis: Das erhält man unmittelbar durch Ausmultiplizieren und Ableiten in $t = 0$. *QED*

Lemma 11. *Für eine Matrixgruppe $G \subset GL(n,\mathbb{R})$ ist ihre Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mit dem Kommutator $[.,.]$ eine abstrakte Lie-Algebra.*

Beweis: Wir prüfen zunächst nach, dass $\mathfrak{g}$ ein Vektorraum ist. Die Implikation $A \in \mathbb{R} \Rightarrow tA \in \mathbb{R}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ergibt sich unmittelbar aus Definition 4. Für die Abgeschlossenheit unter Summenbildung betrachte $A, B \in \mathfrak{g}$. Dann ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ und jedes $m \in N$ mit $e^{\frac{tA}{m}} \in G$ und $e^{\frac{tB}{m}} \in G$ auch die Potenz

$$(e^{\frac{tA}{m}}e^{\frac{tB}{m}})^m \in G.$$

Weil G eine abgeschlossene Untergruppe ist und nach Lemma 7

$$e^{t(A+B)} = \lim_{m\to\infty}(e^{\frac{tA}{m}}e^{\frac{tB}{m}})^m$$

gilt, ist $e^{t(A+B)} \in G$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und mithin $A + B \in \mathfrak{g}$.

Wir beweisen jetzt, dass $\mathfrak{g}$ abgeschlossen unter Bildung von Kommutatoren ist. Seien also $A, B \in \mathfrak{g}$. Dann ist $e^{tA}Be^{-tA} \in \mathfrak{g}$ wegen

$$e^{s(e^{tA}Be^{-tA})} = e^{tA}e^{sB}e^{-tA} \in G \;\forall\; s \in \mathbb{R}$$

und mit
$$[A,B]=\frac{d}{dt}|_{t=0}(e^{tA}Be^{-tA})$$
folgt
$$[A,B]\in\mathfrak{g}.$$

Schließlich rechnet man leicht nach, dass der Kommutator bilinear ist und die Bedingungen i),ii) aus Definition 5 erfüllt. *QED*

Beispiel 14 2-*dimensionale Lie-Algebren*
Man kann zeigen, dass es bis auf Isomorphie genau zwei Lie-Algebren $(V,[.,.])$ mit $V=\mathbb{R}^2$ gibt:
- die abelsche Lie-Algebra mit $[X,Y]=0$ für alle X,Y,
- die Lie-Algebra $\mathfrak{aff}(\mathbb{R}^1)$ der Lie-Gruppe der affinen Abbildungen. Für diese ist $[e_1,e_2]=e_1$ und $[e_1,e_1]=0=[e_2,e_2]$.

Beispiel 15 *Die Lie-Algebra* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.
Eine Basis von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ ist gegeben durch
$$H=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},X=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}.$$
Die Kommutatoren sind
$$[H,X]=2X,[H,Y]=-2Y,[X,Y]=H.$$

Definition 7. *Ein Homomorphismus von Lie-Gruppen ist eine differenzierbare Abbildung $\Phi\colon G\to H$ zwischen Lie-Gruppen G,H, so dass*
$$\Phi(g_1g_2^{-1})=\Phi(g_1)\phi(g_2)^{-1}$$
für alle $g_1,g_2\in G$ gilt.

Ein Homomorphismus von Lie-Algebren ist eine lineare Abbildung $\phi\colon V\to W$ zwischen Lie-Algebren V,W, so dass
$$\phi\,[v_1,v_2]=[\phi(v_1),\phi(v_2)]$$
für alle $v_1,v_2\in V$ gilt.

Lemma 12. *Sei $\Phi\colon G\to H$ ein Homomorphismus von Matrix-Gruppen und $\phi\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ definiert durch*
$$\phi(X)=\frac{d}{dt}|_{t=0}\Phi(e^{tX}).$$
Dann ist ϕ ein Homomorphismus von Lie-Algebren und es gilt
$$\Phi(e^X)=e^{\phi(X)}$$
für alle $X\in\mathfrak{g}$.

Beweis: Sei $X\in\mathfrak{g}$. Nach Definition ist $\Phi(e^{tX})$ eine 1-Parameter-Gruppe mit
$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\Phi(e^{tX})=\phi(X).$$
Aus Lemma 17 folgt, dass sie mit $e^{t\phi(X)}$ übereinstimmt. Insbesondere ist
$$\Phi(e^X)=e^{\phi(X)}.$$
Die Linearitätsbedingung
$$s\phi(X)=\phi(sX)$$
für $s\in\mathbb{R}$ folgt durch Ableiten der Identität
$$e^{ts\phi(X)}=\Phi(e^{tsX})=e^{t\phi(sX)}$$
in $t=0$.

Die Gleichung

$$\phi(X+Y)=\phi(X)+\phi(Y)$$

folgt mit der Identität

$$\begin{aligned} e^{t\phi(X+Y)} &= e^{\phi(tX+tY)} = \Phi(e^{tX+tY}) = \Phi(\lim_{n\to\infty}(e^{\frac{tX}{n}}e^{\frac{tY}{n}})^n) \\ &= \lim_{n\to\infty}\Phi(e^{\frac{tX}{n}}e^{\frac{tY}{n}})^n) = \lim_{n\to\infty}(\Phi(e^{\frac{tX}{n}})\Phi(e^{\frac{tY}{n}}))^n \\ &= \lim_{n\to\infty}(e^{\frac{t\phi(X)}{n}}e^{\frac{t\phi(Y)}{n}})^n = e^{t(\phi(X)+\phi(Y))} \end{aligned}$$

ebenfalls durch Ableiten in $t=0$.

Um zu beweisen, dass ϕ mit Kommutatoren verträglich ist, benutzen wir dass nach Lemma 10

$$[X,Y]=\frac{d}{dt}|_{t=0}(e^{tX}Ye^{-tX})$$

gilt. Wir bemerken, dass aus

$$e^{t\phi(AXA^{-1})}=\Phi(A)e^{t\phi(X)}\Phi(A)^{-1}$$

durch Ableiten in $t=0$

$$\phi(AXA^{-1})=\Phi(A)\phi(X)\phi(A)^{-1}$$

folgt und damit dann

$$\phi([X,Y])=\phi(\frac{d}{dt}|_{t=0}(e^{tX}Ye^{-tX}))$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|_{t=0}\phi(e^{tX}Ye^{-tX}) &= \frac{d}{dt}\ |_{t=0}\ \Phi(e^{tX}\phi(Y)\Phi(e^{-tX}) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}e^{t\phi(X)}\phi(Y)e^{-t\phi(X)} = [\phi(X),\phi(Y)]\,. \end{aligned}$$

QED

2. Lie-Gruppen und ihre Lie-Algebren

Für die Grundbegriffe über Vektorfelder, Derivationen und Kommutatoren verweisen wir auf den Anhang Abschnitt 7.3.

2.1. **Lie-Algebra einer Lie-Gruppe.**

2.1.1. *Die Lie-Algebra links-invarianter Vektorfelder.*

Definition 8. *Ein Vektorfeld auf einer Lie-Gruppe G ist links-invariant, wenn*

$$X_{gh}=Dl_g(X_h)$$

für alle $g,h\in G$ gilt.

Beispiel 16 *Links-invariante Vektorfelder auf dem $\mathbb{R}^n$*
Ein Vektorfeld

$$\sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

auf dem $\mathbb{R}^n$ ist genau dann links-invariant, wenn $a_1,\ldots,a_n$ konstante Funktionen sind.

Beispiel 17 *Links-invariante Vektorfelder auf dem Torus*
Ein Vektorfeld

$$\sum_{i=1}^n a_i([x])\frac{\partial}{\partial x_i}$$

auf $T^n=\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ ist genau dann links-invariant, wenn $a_1,\ldots,a_n$ konstante Funktionen sind.

Lemma 13. *Der Vektorraum der links-invarianten Vektorfelder auf einer Lie-Gruppe mit dem Kommutator ist eine abstrakte Lie-Algebra.*

Beweis: l_g ist ein Diffeomorphismus, wir können also Proposition 5 auf l_g anwenden und erhalten, dass der Kommutator links-invarianter Vektorfelder wieder links-invariant ist. Außerdem wissen wir bereits, dass der Kommutator von Vektorfeldern die Axiome einer abstrakten Lie-Algebra erfüllt. QED

Definition 9. *Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ einer Lie-Gruppe G ist definiert als die Lie-Algebra der links-invarianten Vektorfelder auf G.*

Lemma 14. *Sei G eine Lie-Gruppe. Dann gibt es einen Vektorraum-Isomorphismus*

$$T_eG \cong \mathfrak{g}.$$

Beweis: $X \in T_{\mathbb{1}}G$ entspricht dem links-invarianten Vektorfeld

$$\overline{X}_g := (D_{\mathbb{1}} l_g)X \quad \forall g \in G.$$

QED

Definition 10. *Eine 1-Parameter-Gruppe in einer Lie-Gruppe G ist eine Untergruppe, die das Bild eines Homomorphismus $\Theta\colon \mathbb{R} \to G$ ist.*

> **Beispiel 18** *Sei G eine Matrix-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Dann ist zu $A \in \mathfrak{g}$ das Bild von $\Theta(t) = exp(tA)$ eine 1-Parameter-Gruppe in G.*

Lemma 15. *Zu einem links-invarianten Vektorfeld X auf einer Lie-Gruppe G gibt es eine 1-Parameter-Gruppe von Diffeomorphismen mit*

$$\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\Phi(t,g) = X(\Phi(t_0,g))$$

für alle $t_0 \in \mathbb{R}, g \in G$.

Beweis: Nach dem Existenzsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen gibt es zu jedem $g \in G$ ein $\epsilon > 0$, so dass $\Phi(t,g)$ für $|t| < \epsilon$ definiert ist.

Aus der Links-Invarianz des Vektorfeldes ergibt sich aber, dass man für jedes g dasselbe ϵ wählen kann. Daraus folgt die Fortsetzbarkeit des Flußes auf ganz $\mathbb{R}$. QED

Zu $A \in \mathfrak{g}$ bezeichnen wir mit $\overline{A}$ das links-invariante Vektorfeld

$$\overline{A}(g) = D_e l_g(A).$$

Definition 11. *Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Die Exponentialabbildung*

$$exp\colon \mathfrak{g} \to G$$

wird definiert durch

$$exp(A) := \Phi_1(\mathbb{1}),$$

wobei $\Phi_t\colon G \to G$ der Fluß des links-invarianten Vektorfeldes $\overline{A}$ ist.

Lemma 16. *Die Exponentialabbildung einer Lie-Gruppe ist ein lokaler Diffeomorphismus um 0.*

Beweis: Aus der Definition folgt $D_0 exp = Id$. QED

Lemma 17. *Zu jedem Homomorphismus $\Theta\colon \mathbb{R} \to G$ gibt es ein eindeutiges $A \in \mathfrak{g}$, so dass*
$$\Theta(t) = e^{tA}$$
für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Beweis: Zu einem Homomorphismus Θ betrachten wir $A := \Theta'(0)$. Für ein festes $s \in \mathbb{R}$ folgt aus $\Theta(t+s) = \Theta(t)\Theta(s)$, dass
$$\Theta'(s) = \Theta'(0)\Theta(s) = A\Theta(s)$$
ist. Nach dem Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen hat diese Differentialgleichung nur eine Lösung zum Anfangswert $\Theta(0) = \mathbb{1}$ und diese ist $\Theta(t) = exp(tA)$. *QED*

Satz 4. (Baker-Campbell-Hausdorff-Formel) *Sei G eine Lie-Gruppe. Dann gibt es zu zwei Vektoren $X, Y \in T_{\mathbb{1}}G$ für hinreichend kleine t ein $Z(t) \in T_{\mathbb{1}}G$ mit*
$$exp(tX)exp(tY) = exp(Z(t)).$$
Explizit ist
$$Z(t) = t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X,Y] + O(t^3)$$
Der Kommutator misst also infinitesimal, wie sehr sich $e^X e^Y$ von e^{X+Y} oder von $e^Y e^X$ unterscheidet.

Beweis: Die erste Behauptung ergibt sich unmittelbar aus Lemma 16.

Die explizite Berechnung der Koeffizienten findet man in *E. B. Dynkin: "Calculation of the coefficients in the Campbell-Hausdorff formula", Doklady Akad. Nauk USSR, 57 (1947) 323-326.* *QED*

Lemma 18. *Wenn $F\colon G_1 \to G_2$ ein differenzierbarer Homomorphismus zwischen Lie-Gruppen ist, dann ist*
$$D_{\mathbb{1}}F\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$$
ein Homomorphismus von Lie-Algebren und es gilt
$$exp(D_{\mathbb{1}}F(X)) = F(exp(X))$$
für alle $X \in \mathfrak{g}_1$.

Beweis: Ein Gruppenhomomorphismus bildet links-invariante Vektorfelder in links-invariante Vektorfelder ab und diese Abbildung entspricht gerade $D_{\mathbb{1}}F : T_{\mathbb{1}}G_1 \to T_{\mathbb{1}}G_2$. Die erste Behauptung folgt damit aus der allgemeinen in Proposition 5 für beliebige differenzierbare Abbildungen.

Die zweite Behauptung ergibt sich aus der Gleichheit der 1-Parameter-Gruppen $exp(DF(tX))$ und $F(exp(tX))$, die in $t = 0$ beide die Ableitung $DF(X)$ haben und deshalb auch in $t = 1$ übereinstimmen müssen. *QED*

2.1.2. *Die Lie-Algebra von Matrix-Gruppen.*

Lemma 19. *Sei $G = GL(n, \mathbb{R})$ und $A \in \mathfrak{g} = Mat(n, \mathbb{R})$. Dann ist*
$$exp(A) = e^A.$$

Beweis: Das A entsprechende links-invariante Vektorfeld ist
$$X_g := gA \quad \forall g \in G.$$
Dessen Fluss ist
$$\Phi_t(g) = ge^{tA},$$

denn es ist $\Phi_0(g) = g$ und

$$\frac{d}{dt}|_{t=t_0} g e^{tA} = \frac{d}{dt}\,|_{t=t_0}\; g + tgA + \frac{1}{2!}t^2 gA^2 + \frac{1}{3!}t^3 gA^3$$
$$= g(A + t_0 A^2 + \frac{1}{2!}t_0^2 A^2 + \ldots) = g(\mathbb{1} + t_0 A + \frac{1}{2!}t_0^2 A^2 + \ldots)A$$
$$= g e^{t_0 A} A.$$

Insbesondere ist

$$exp(A) = \Phi_1(\mathbb{1}) = e^A.$$

QED

Korollar 2. *Für eine Lie-Gruppe $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ ist*

$$T_{\mathbb{1}} G = \left\{ A \in Mat(n, \mathbb{R}) \colon e^{tA} \in G \;\forall t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Beweis: Mit $A \in T_{\mathbb{1}} G$ ist auch $tA \in T_{\mathbb{1}} G$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Mit Lemma 19 folgt

$$e^{tA} = exp(tA) \in G.$$

Umgekehrt sei $e^{tA} \in G$ für alle $t \in \mathbb{R}$, dann ist

$$A = \frac{d}{dt}|_{t=0} e^{tA} \in T_{\mathbb{1}} G,$$

weil e^{tA} eine Kurve in G durch $\mathbb{1}$ ist. *QED*

Beispiel 19 *Aus $exp(A) \in G$ folgt im Allgemeinen nicht $A \in \mathfrak{g}$.*
Zum Beispiel ist $A = \begin{pmatrix} \pi i & 0 \\ 0 & \pi i \end{pmatrix} \notin \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$,
aber $exp(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$.

Lemma 20. *Sei $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ eine Lie-Gruppe, $X, Y \in T_{\mathbb{1}} G$ und $\overline{X}, \overline{Y}$ die zugehörigen links-invarianten Vektorfelder mit*

$$\overline{X}_{\mathbb{1}} = X, \overline{Y}_{\mathbb{1}} = Y.$$

Dann ist

$$\left[\overline{X}, \overline{Y}\right]_{\mathbb{1}} = [X, Y].$$

Beweis: Wegen Bilinearität genügt es, die Behauptung für Elementarmatrizen

$$X = e_{pq}, Y = e_{rs}$$

nachzuprüfen.

Zunächst rechnet man nach, dass dann

$$[X, Y] = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & p \neq s, q \neq r \\ e_{ps} & p \neq s, q = r \\ -e_{rq} & p = s, q \neq r \\ e_{pp} - e_{qq} & p = s, q = r \end{array} \right\}$$

ist.

Die zu X und Y gehörenden Vektorfelder sind

$$(\overline{X}(A))_{ij} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & j \neq q \\ A_{ip} & j = q \end{array} \right\} = \delta_{j,q} A_{ip},$$

$$(\overline{Y}(A))_{ij} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & j \neq s \\ A_{ir} & j = s \end{array} \right\} = \delta_{j,s} A_{ir}.$$

Damit erhalten wir die Ableitungen

$$\frac{\partial \overline{Y}_{ij}}{\partial x_{kl}}(A) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\overline{Y}(A+te_{kl})_{ij} =$$

$$\left\{ \begin{array}{cc} \frac{d}{dt}|_{t=0}(A+te_{kl})_{ir} & j=s \\ 0 & j\neq s \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & j=s,k=i,l=r \\ 0 & sonst \end{array} \right\} = \delta_{i,k}\delta_{j,s}\delta_{l,r}$$

und

$$\frac{\partial \overline{X}_{ij}}{\partial x_{kl}}(A)\delta_{i,k}\delta_{j,q}\delta_{l,p}$$

also

$$\frac{\partial \overline{X}}{\partial x_{k,l}} \equiv \delta_{l,p}e_{kq}, \frac{\partial \overline{Y}}{\partial x_{k,l}} \equiv \delta_{l,r}e_{ks}$$

Damit ergibt sich für die (i,j)-Komponente des Kommutators an der Stelle $A = \mathbb{1}$

$$\left[\overline{X}, \overline{Y}\right]_{i,j} = \sum_{k,l=1}^{n} (\overline{X}_{kl}\frac{\partial \overline{Y}_{ij}}{\partial x_{k,l}} - \overline{Y}_{kl}\frac{\partial \overline{X}_{ij}}{\partial x_{k,l}})$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} \delta_{i,k}\delta_{j,s}\delta_{l,r}\overline{X}_{kl} - \sum_{k,l=1}^{n} \delta_{i,k}\delta_{j,q}\delta_{l,p}\overline{Y}_{kl}$$

$$= \delta_{j,s}\overline{X}_{ir} - \delta_{j,q}\overline{Y}_{ip}$$

$$= \delta_{j,s}\delta_{r,q}A_{ip} - \delta_{j,q}\delta_{p,s}A_{ir}$$

$$= \delta_{j,s}\delta_{r,q}\delta_{i,p} - \delta_{j,q}\delta_{p,s}\delta_{i,r}$$

und man prüft nach, dass dies mit dem oben berechneten Ausdruck für $[X,Y]$ übereinstimmt. *QED*

2.2. **Abelsche Lie-Gruppen.**

2.2.1. *Klassifikation abelscher Lie-Gruppen.*

Definition 12. *Der n-dimensionale Torus ist die Lie-Gruppe*

$$T^n = S^1 \times \ldots \times S^1 = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n.$$

Satz 5. *Jede zusammenhängende, abelsche Lie-Gruppe ist isomorph zu*

$$\mathbb{R}^k \times T^l$$

für ein Paar (k,l).

Insbesondere ist jede kompakte, zusammenhängende, abelsche Lie-Gruppe ein Torus.

Beweis: Wir beweisen, dass $exp\colon \mathfrak{g} \to G$ ein surjektiver Homomorphismus mit diskretem Kern ist, woraus die Behauptung folgt.

Wenn G abelsch ist, dann ist die Multiplikation

$$m\colon G \times G \to G$$

ein Homomorphismus und wir haben

$$m(exp(X), exp(Y)) = exp(D_{\mathbb{1},\mathbb{1}}m(X,Y)).$$

Man rechnet leicht nach, dass

$$D_{(\mathbb{1},\mathbb{1})}m(X,Y) = X + Y,$$

woraus

$$exp(X)exp(Y) = exp(X+Y)$$

folgt, exp ist also ein Homomorphismus.

Weil exp ein lokaler Diffeomorphismus in 0 ist, gibt es jedenfalls eine Umgebung U von 0, die ganz im Bild von exp liegt. Weil G zusammenhängend ist, ist es auch wegzusammenhängend. Zu $g \in G$ finden wir also einen stetigen Weg γ von $\mathbb{1}$ nach G. Die offenen Mengen $\left\{\gamma^{-1}(g+U)\right\}_{g\in G}$ bilden eine offene Überdeckung eines kompakten Intervalls, die also eine endliche Teilüberdeckung hat. Damit können wir das Intervall in endlich viele Stücke zerlegen, die in einer Kopie von U liegen. Mit anderen Worten, wir zerlegen

$$g = g_1 \ldots, g_m \text{ mit } g_1, \ldots, g_m \in U.$$

Dann haben wir

$$g_i = exp(X_i)$$

für geeignete $X_i \in T_1G$ und weil exp ein Homomorphismus ist, folgt

$$g = exp(X_1 + \ldots + X_m),$$

was die Surjektivität von exp beweist.

Für $h \in ker(exp)$ ist

$$(h+U) \cap ker(exp) = \{h\},$$

denn mit der Homomorphie von exp folgt aus $exp(h) = \mathbb{1}$ und $exp(u) \neq \mathbb{1}$ stets $exp(h+u) \neq \mathbb{1}$. Damit ist $ker(exp)$ eine diskrete Untergruppe von $T_1G \cong \mathbb{R}^n$.

Mit dem Homomorphiesatz bekommen wir einen Isomorphismus

$$G \cong \mathbb{R}^n/\Gamma$$

für eine diskrete Untergruppe $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$.

Bekanntlich ist eine *diskrete* Untergruppe $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ eine freie abelsche Gruppe vom Rang $rk(\Gamma) \leq n$. Man kann ein Erzeugendensystem also zu einer Basis von $\mathbb{R}^n$ von fortsetzen und bekommt einen Isomorphismus $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, der Γ auf $\mathbb{Z}^k$ mit $k = rk(\Gamma)$ abbildet. *QED*

2.2.2. *Dynamik von Vektorfeldern auf dem Torus.*

Definition 13. *Sei V ein Vektorfeld auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M und Φ_t sein Fluss. Ein Orbit von V ist die Menge*

$$O_x = \{\Phi_t x \colon t \in \mathbb{R}\}.$$

Definition 14. *Ein Vektorfeld V auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M heisst strukturell stabil, wenn es zu jeder hinreichend kleinen Störung W von V einen Diffeomorphismus $M \to M$ gibt, welcher die Orbiten von V auf die Orbiten von W abbildet.*

Definition 15. *Ein lineares Vektorfeld auf dem Torus R_α mit $\alpha \in \mathbb{R}^2$ ist das Vektorfeld auf $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, welches unter der kanonischen Identifizierung*

$$TT^2 \cong T^2 \times \mathbb{R}^2$$

der konstanten Abbildung $V_{x,y} = \alpha$ entspricht.

Lemma 21. *Ein Vektorfeld auf dem Torus ist genau dann links-invariant, wenn es linear ist.*

Beweis: Das folgt aus Beispiel 17. *QED*

Satz 6. *Ein lineares Vektorfeld R_α auf T^2 hat periodische Orbiten wenn $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ rational und dichte Orbiten wenn $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ irrational ist.*

Beweis: Man kann die Frage nach periodischen oder dichten Orbiten von R_α leicht darauf zurückführen, ob die Rückkehrabbildung

$$T_\alpha \colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

periodische oder dichte Orbiten hat. Letztere entspricht gerade der Rotation von S^1 um den Winkel $2\pi\alpha$ mit $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$.

Falls $\alpha = \frac{p}{q}$ eine rationale Zahl ist, dann ist T_α^q die Identitätsabbildung, die Drehung ist also periodisch.

Falls $\alpha \notin \mathbb{Q}$, dann gibt es keine periodischen Punkte von T_α, insbesondere ist der Orbit unendlich in der kompakten Mannigfaltigkeit S^1. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es also $k, l \in \mathbb{Z}$ mit

$$d(T_\alpha^k x, T_\alpha^l x) < \epsilon$$

(für ein und damit alle x). Daraus folgt

$$d(T_\alpha^{k-l} x, x) < \epsilon.$$

Die Iterierten

$$T_\alpha^{m(k-l)} x, m \in \mathbb{Z}$$

zerlegen den Kreis also in Intervalle der Länge kleiner ϵ. Zu einem beliebigen $z \in S^1$ gibt es damit einen Punkt im Orbit von x, dessen Abstand von z kleiner als ϵ ist. Weil das für alle $\epsilon > 0$ gilt, liegt der Orbit von x dicht. *QED*

Korollar 3. *Für $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \in \mathbb{Q}$ ist der Orbit von R_α durch $(0,0)$ eine abgeschlossene Untergruppe von T^2 und insbesondere eine Lie-Gruppe diffeomorph zu S^1.*

Für $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \notin \mathbb{Q}$ ist der Orbit von R_α durch $(0,0)$ eine Untergruppe, aber keine Untermannigfaltigkeit von T^2 und keine Lie-Gruppe.

Korollar 4. *Für $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \in \mathbb{Q}$ hat die Blätterung von T^2 durch Orbiten von R_α nur geschlossene Blätter.*

Für $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \notin \mathbb{Q}$ hat die Blätterung von T^2 durch Orbiten von R_α nur dicht liegende (insbesondere nicht geschlossene) Blätter.

Korollar 5. *Lineare Vektorfelder auf dem Torus sind nicht strukturell stabil.*

Beweis: Durch beliebig kleine Störungen von R_α erhält man sowohl R_β mit $\beta \in \mathbb{Q}$ als auch R_β mit $\beta \notin \mathbb{Q}$. Ein Diffeomorphismus $f \colon M \to M$ würde aber periodische Orbiten in periodische Orbiten und dichte Orbiten in dichte Orbiten abbilden. *QED*

2.2.3. *Selbstabbildungen des Torus.*

Definition 16. *Eine lineare Selbstabbildung des Torus $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ist die einer Matrix $A \in Mat(2, \mathbb{Z})$ entsprechende Abbildung*

$$f([(x,y)]) = [A(x,y)] : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2.$$

Lemma 22. *Jede Selbstabbildung des Torus ist homotop zu einer linearen Selbstabbildung.*

Beweis: Eine Selbstabbildung $f \colon T^2 \to T^2$ ist homotop zu einer, die den Basispunkt $[(0,0)]$ festlässt, und diese induziert einen Automorphismus von

$$\pi_1(T^2, [(0,0)]) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

also ein Element aus $Mat(2, \mathbb{Z})$. Wir zeigen, dass f homotop zu der diesem Automorphismus entsprechenden linearen Selbstabbildung ist.

Der Torus ist ein Zellkomplex mit einer 0-Zelle, zwei 1-Zellen und einer 2-Zelle. Wir haben bereits eine Homotopie der Abbildungen des 1-Skeletts und können diese mit dem Alexander-Trick auf die 2-Zelle fortsetzen. *QED*

2.2.4. *Dynamik von Selbstabbildungen des Torus.*

Definition 17. *Eine Abbildung $f\colon X \to X$ heisst topologisch transitiv, wenn es zu je zwei offenen Mengen U, V ein $n \in \mathbb{Z}$ mit*

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset$$

gibt.

Lemma 23. *Eine Selbstabbildung eines separablen metrischen Raumes X ist genau dann topologisch transitiv, wenn es einen dichten Orbit gibt.*

Beweis: Wenn der Orbit von x dicht ist, dann schneidet er alle offenen Mengen, es gibt also $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $f^m(x) \in U, f^n(x) \in V$, woraus $f^{n-m}(U) \cap V \neq \emptyset$ folgt.

Für die Umkehrung wählen wir eine abzählbare, dichte Menge von Punkten in X und betrachten die abzählbare Menge von offenen Kugeln mit rationalem Radius um diese Punkte. Jede offene Menge enthält ein U_i. Es genügt also zu zeigen, dass ein Orbit alle diese offenen Mengen U_i schneidet.

Wegen topologischer Transitivität gibt es ein N_1 mit $f^{N_1}(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$. Dann gibt es eine offene Kugel V_1 mit $\overline{V}_1 \subset U_1 \cap f^{-N_1}(U_2)$. Wir können annehmen, dass der Radius von V_1 kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Wieder wegen topologischer Transitivität gibt es ein N_2 mit $f^{N_2}(V_1) \cap U_3 \neq \emptyset$ und man findet eine offene Kugel V_2 vom Radius kleiner als $\frac{1}{4}$ mit $\overline{V}_2 \subset V_1 \cap f^{-N_2}(U_3)$. Induktiv bekommen wir offene Kugeln V_n vom Radius kleiner als $\frac{1}{2^n}$ mit

$$\overline{V}_n \subset V_{n-1} \cap f^{-N_n}(U_{n+1}).$$

Die Mittelpunkte dieser Kugeln bilden eine Cauchy-Folge und konvergieren mithin gegen einen Punkt x. Dieser liegt aber in $f^{-N_n}(U_{n+1})$ für alle n. Sein Orbit schneidet also alle U_i.

QED

Definition 18. *Eine Abbildung $f\colon X \to X$ heisst chaotisch, wenn sie topologisch transitiv ist und ihre periodischen Punkte dicht in X liegen, sowie X nicht nur aus einem periodischen Orbit von f besteht.*

Wenn eine Abbildung chaotisch ist, dann ist sie sensitiv gegenüber Anfangsbedingungen. Das bedeutet: es gibt eine Konstante

$$\Delta > 0,$$

so dass für alle $x \in X, \epsilon > 0$ ein $y \in X$ und $N \in \mathbb{N}$ existieren mit

$$d(x,y) < \epsilon, d(f^N x, f^N y) \geq \Delta.$$

Definition 19. *Eine Selbstabbildung f des Torus heisst Anosovsch, wenn es zwei f-invariante Blätterungen $\mathcal{F}^{\pm}$ des Torus durch parallele Geraden und ein $\lambda > 1$ gibt, so dass gilt: wenn x, y im selben Blatt von $\mathcal{F}^+$ bzw. $\mathcal{F}^-$ liegen, dann ist*

$$d(f(x), f(y)) > \lambda d(x,y) \text{ bzw. } d(f(x), f(y)) < \frac{1}{\lambda} d(x,y).$$

Lemma 24. *Sei $A \in SL(2,\mathbb{Z})$. Dann ist die entsprechende lineare Selbstabbildung des Torus*

i) periodisch, wenn $-2 < Spur(A) < 2$, *ii) reduzibel, d.h. eine geschlossene Kurve invariant lassend, wenn $Spur(A) = \pm 2$,*

iii) Anosovsch, wenn $|Spur(A)| > 2$.

Beweis: Wegen $det(A) = 1$ sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda_{1,2} = \frac{Spur(A)}{2} \pm \sqrt{\frac{(Spur(A))^2 - 4}{4}}.$$

Für $|Spur(A)| > 2$ erhält man zwei reelle Eigenwerte, deren Produkt 1 ist, einer der beiden ist also betragsmässig grösser als 1. Die Blätterungen durch Geraden parallel zu einem der beiden Eigenvektoren haben die gewünschte Eigenschaft von Anosov-Abbildungen.

Für $Spur(A) = \pm 2$ hat die Matrix den doppelten Eigenwert ± 1. Man berechnet, dass die Eigenvektoren rationalen Anstieg haben, insbesondere geben sie eine geschlossene Kurve auf dem Torus, die unter f invariant ist.

Für $-2 < Spur(A) < 2$ ist die Spur 0 oder ± 1 und man erhält aus obiger Formel, dass der erste Eigenwert i oder $\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}$ ist, in jedem Fall also eine vierte oder sechste Einheitswurzel. Dasselbe gilt für den zweiten Eigenwert, der das Inverse des ersten ist. Es gilt also $A^4 = \mathbb{1}$ oder $A^6 = \mathbb{1}$. *QED*

Lemma 25. *Eine lineare Anosov-Abbildung des Torus ist chaotisch.*

Beweis: Alle Punkte mit rationalen Koordinaten sind periodische Punkte jeder Abbildung aus $Mat(2, \mathbb{Z})$: wenn q der Hauptnenner der beiden rationalen Koordinaten ist, dann haben auch alle Bildpunkte und die iterierten jeweils rationale Koordinaten mit einem q teilenden Hauptnenner - von diesen Punkten gibt es aber nur endlich viele.

Man berechnet, dass die Eigenvektoren irrationalen Anstieg haben, insbesondere geben sie eine dichte Kurve auf dem Torus und es gibt zu jedem $\epsilon > 0$ ein T, so dass jedes Segment der Länge T jeden Ball vom Radius ϵ schneidet.

Seien nun U und V beliebige offene Mengen. Sei $\epsilon > 0$ so gewählt, dass V einen Ball vom Radius ϵ enthält, und sei T definiert wie eben.

Die offene Menge U enthält ein Segment J eines der Blätter von ϵ. Sei l die Länge dieses Segments und sei n so gewählt, dass $nl > T$. Dann ist wegen der Anosov-Bedingung $f^n(J)$ ein Segment eines anderen Blattes der Länge mindestens T. Insbesondere schneidet $f^n(J)$ die offene Menge V, woraus

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset$$

folgt. f ist also topologisch transitiv. *QED*

3. Elementare Darstellungstheorie

3.1. **Grundlagen.**

3.1.1. *Grundbegriffe.*

Definition 20. *Eine (endlich-dimensionale, reelle) Darstellung einer Lie-Gruppe G ist ein differenzierbarer Homomorphismus*

$$\rho\colon G \to GL(V)$$

in die Gruppe der invertierbaren linearen Abbildungen eines (endlich-dimensionalen, reellen) Vektorraumes V. Nach Wahl einer Basis von V kann man eine endlich-dimensionale, reelle Darstellung auch als Homomorphismus

$$\rho\colon G \to GL(n, \mathbb{R})$$

mit $n = dim(V)$ auffasse.

Beispiel 20 *Einfache Beispiele*
Die triviale Darstellung einer Lie-Gruppe G ist $\rho(g) \equiv \mathbb{1}$.
Die natürliche Darstellung einer Matrix-Gruppe $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ ist $\rho(g) = g$ für alle $g \in G$.
Die Determinanten-Darstellung $\rho\colon G \to GL(1, \mathbb{R})$ einer Matrix-Gruppe G ist $\rho(g) = (Det(g))$ für alle $g \in G$.
Aus Proposition 1 kennen wir die adjungierte Darstellung $Ad\colon SU(2) \to SO(3)$.

Definition 21. *Zwei Darstellungen*

$$\rho_1, \rho_2\colon G \to GL(n, \mathbb{R})$$

heissen äquivalent, wenn es ein $A \in GL(n, \mathbb{R})$ gibt mit

$$\rho_2(g) = A\rho_1(g)A^{-1}$$

für alle $g \in G$.

Beispiel 21 *Basiswechsel eines Vektorraums führen zu äquivalenten Darstellungen*
Wenn nämlich eine Darstellung in der Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ die Form $\rho_1\colon G \to GL(n, \mathbb{R})$ hat, dann hat sie in der Basis $\{Bb_1, \ldots, Bb_n\}$ die Form $B\rho_1 B^{-1}\colon G \to GL(n, \mathbb{R})$.

Lemma 26. *Für äquivalente Darstellungen ρ_1, ρ_2 gilt*

$$Det(\rho_1(g)) = Det(\rho_2(g)), Spur(\rho_1(g)) = Spur(\rho_2(g))$$

für alle $g \in G$.

Beispiel 22 *Nichtäquivalente Darstellungen mit denselben Charakteren*
Die Darstellung $\rho\colon \mathbb{R} \to GL(2, \mathbb{R})$ mit

$$\rho(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat dieselben Spuren und Determinanten wie die triviale Darstellung, ist aber nicht zu dieser äquivalent.

3.1.2. *Irreduzibilität und direkte Summen von Darstellungen.*

Definition 22. *Sei $\rho\colon G \to GL(n, \mathbb{R})$ eine Darstellung. Ein invarianter Unterraum ist ein Untervektorraum $V \subset \mathbb{R}^n$ mit*

$$\rho(g)(v) \in V$$

für alle $v \in V, g \in G$.

Beispiel 23 *Invariante Unterräume von Blockmatrizen*
Für $n > m$ hat man eine Darstellung $GL(m, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$ durch Blockmatrizen

$$A \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

Invariante Unterräume von $\mathbb{R}^n$ sind $\mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m}$ oder natürlich auch $\{0\}^m \times V$ für jeden Untervektorraum $V \subset \mathbb{R}^{n-m}$.

Definition 23. *Eine Darstellung $\rho\colon G \to GL(n, \mathbb{R})$ heisst irreduzibel, wenn 0 und $\mathbb{R}^n$ die einzigen invarianten Unterräume von $\mathbb{R}^n$ sind. Andernfalls heisst die Darstellung reduzibel.*

Beispiel 24 *Die Inklusion $O(n) \to GL(n, \mathbb{R})$ ist eine irreduzible Darstellung.*

Sei nämlich $W \subset \mathbb{R}^n$ ein $O(n)$-invarianter Unterraum. Dann gibt es eine Orthonormalbasis von W, die sich zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ fortsetzen lässt. Wenn W nicht 0 oder ganz $\mathbb{R}^n$ ist, dann gibt es orthogonale Abbildungen, die diese Basisvektoren so permutieren, dass W nicht invariant gelassen wird.

Definition 24. *Die direkte Summe $\rho_1 \oplus \rho_2$ zweier Darstellungen*

$$\rho_1 \colon G \to GL(n, \mathbb{R}), \rho_2 \colon G \to GL(m, \mathbb{R})$$

derselben Lie-Gruppe ist gegeben durch die Block-Matrizen

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g) = \begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}$$

für alle $g \in G$.

Beispiel 25 *Eine unzerlegbare Darstellung.*

Die direkte Summe zweier nicht-trivialer Darstellungen ist reduzibel. Jedoch läßt sich nicht jede reduzible Darstellung als direkte Summe irreduzibler Darstellungen zerlegen. Ein Beispiel ist die durch

$$\rho(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegebene Darstellung $\rho \colon \mathbb{R} \to GL(2, \mathbb{R})$. Diese hat den Aufspann von $(1, 0)$ als einzigen invarianten Unterraum, läßt sich also nicht als Summe zweier invarianter Unterräume zerlegen.

3.1.3. *Darstellungen kompakter Gruppen.*

Definition 25. *Sei $\rho \colon G \to GL(n, \mathbb{R})$ eine Darstellung. Ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ heisst invariant, wenn für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Beispiel 26 *Das Standard-Skalarprodukt.*

Die natürliche Darstellung $O(n) \to GL(n, \mathbb{R})$ lässt das Standard-Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ invariant.

Beispiel 27 *Ein invariantes Skalarprodukt der adjungierten Darstellung.*

Aus dem Beweis von Proposition 1 wissen wir, dass die adjungierte Darstellung

$$SU(2) \to SO(\mathfrak{su}(2)) = SO(3)$$

das Skalarprodukt

$$-4Spur(XY)$$

invariant lässt.

Proposition 4. *Wenn es zu einer Darstellung ρ ein invariantes Skalarprodukt gibt, dann ist ρ die direkte Summe irreduzibler Darstellungen.*

Beweis: Die Behauptung ist trivialerweise richtig für irreduzible Darstellungen.

Sei ρ eine reduzible Darstellung mit invariantem Unterraum W. Dann ist auch das (bzgl. des Skalarprodukts) orthogonale Komplement $W^\perp$ invariant, denn aus $x \in W^\perp$ folgt für alle $g \in G$ und $y \in W$:

$$\langle \rho(g)x, y \rangle = \langle x, \rho(g^{-1})y \rangle = 0$$

wegen $\rho(g^{-1})y \in W$.

Es gilt $\mathbb{R}^n = W + W^\perp$, denn es gibt (mit Basisergänzung und Gram-Schmidt) eine orthogonale Basis aus Vektoren in W und $W^\perp$.

Diese Zerlegung ist eine direkte Summe, weil das Skalarprodukt positiv definit und deshalb

$$W \cap W^\perp = 0$$

ist. Somit können wir jede reduzible Darstellung als direkte Summe zweier Darstellungen kleinerer Dimension zerlegen.

Die Behauptung folgt jetzt durch vollständige Induktion nach der Dimension des Darstellungsraums. *QED*

Lemma 27. *Jede Darstellung einer kompakten Gruppe hat ein invariantes Skalarprodukt.*

Beweis: Jede Lie-Gruppe hat links-invariante Riemannsche Metriken, demzufolge links-invariante Volumenformen und links-invariante Maße, sogenannte Haar-Maße. Für eine kompakte Lie-Gruppe ist das Haar-Maß endlich und man kann es zu einem links-invarianten Wahrscheinlichkeitsmaß $d\mu$ skalieren.

Ein ρ-invariantes Skalarprodukt erhält man dann als

$$\langle v, w\rangle := \int_G \langle \rho(g)v, \rho(g)w\rangle_{eukl} d\mu(g)$$

mit dem euklidischen Standard-Skalarprodukt $\langle ., .\rangle_{eukl}$. *QED*

Korollar 6. *Jede Darstellung einer kompakten Gruppe ist direkte Summe irreduzibler Darstellungen.*

Beweis: Mit Proposition 4 und Lemma 27 folgt die Behauptung. *QED*

3.1.4. *Schurs Lemma, Darstellungen abelscher Gruppen.*

Definition 26. *Seien*

$$\rho_1 \colon G \to GL(n, \mathbb{R}), \rho_2 \colon G \to GL(m, \mathbb{R})$$

zwei Darstellungen einer Lie-Gruppe G. Dann heisst eine lineare Abbildung

$$f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

(ρ_1, ρ_2)-äquivariant oder kurz G-äquivariant, wenn

$$f(\rho_1(g)v) = \rho_2(g)f(v)$$

für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Lemma 28. *Schur's Lemma I: Seien*

$$\rho_1 \colon G \to GL(n, \mathbb{R}), \rho_2 \colon G \to GL(m, \mathbb{R})$$

zwei irreduzible Darstellungen einer Lie-Gruppe G und

$$f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

eine G-äquivariante lineare Abbildung. Dann ist entweder $f \equiv 0$ oder f ist ein Isomorphismus.

Beweis: Man prüft nach, dass $Kern(f)$ ein ρ_1-invarianter Unterraum von $\mathbb{R}^n$ und $Bild(f)$ ein ρ_2-invarianter Unterraum von $\mathbb{R}^m$ ist. Weil beide Darstellungen irreduzibel sind, müssen Kern und Bild entweder 0 oder der gesamte Vektorraum sein. Für $Kern(f) = \mathbb{R}^n$ oder $Bild(f) = 0$ haben wir $f \equiv 0$. Für $Kern(f) = 0$ und $Bild(f) = \mathbb{R}^m$ ist f ein Isomorphsimus. *QED*

Lemma 29. *Schur's Lemma II: Sei $\rho\colon G \to GL(n,\mathbb{C})$ eine irreduzible komplexe Darstellung und $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ eine G-äquivariante $\mathbb{C}$-lineare Abbildung. Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit*

$$f(v) = \lambda v$$

für alle $v \in \mathbb{C}^n$.

Beweis: Falls nicht $f \equiv 0$ ist, hat f mindestens einen komplexen Eigenwert $\lambda \neq 0$. Der zugehörige Eigenvektor v gehört zu $Kern(f - \lambda \mathbb{1})$, womit $f - \lambda \mathbb{1}$ kein Isomorphismus sein kann. Mit f ist aber auch $f - \lambda \mathbb{1}$ G-äquivariant. Aus Lemma 28 folgt

$$f - \lambda \mathbb{1} = 0.$$

QED

Beispiel 28 *Zentrum von $GL(n,\mathbb{C})$*

Wenn A zum Zentrum von $GL(n,\mathbb{C})$ gehört (und nur dann), ist die durch

$$f_A(v) = Av$$

definierte Abbildung $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wegen

$$f_A(Bv) = ABv = BAv = Bf_A(v)$$

äquivariant bzgl. der Standarddarstellung von $GL(n,\mathbb{C})$. Aus Schur's Lemma folgt damit $A = \lambda \mathbb{1}$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Das Zentrum von $GL(n,\mathbb{C})$ ist also

$$Z(GL(n,\mathbb{C})) = \mathbb{C}\mathbb{1}.$$

Korollar 7. *Irreduzible komplexe Darstellungen abelscher Gruppen sind 1-dimensional.*

Beweis: Sei $\rho\colon G \to GL(n,\mathbb{C})$ eine komplexe Darstellung einer abelschen Lie-Gruppe G. Sei $h \in G$ und $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ die durch

$$f(v) = \rho(h)v$$

gegebene Abbildung.

Weil G abelsch ist, gilt

$$f(\rho(g)v) = \rho(h)\rho(g)v = \rho(g)\rho(h)v = \rho(g)f(v),$$

die Abbildung ist also G-äquivariant.

Aus Lemma 29 folgt nun $f(v) = \lambda_h v$ für ein $\lambda_h \in C$ und alle $v \in \mathbb{C}^n$. Insbesondere ist der von v aufgespannte 1-dimensionale Unterraum invariant und wegen der Irreduzibilität ist also $n = 1$. *QED*

Beispiel 29 *Darstellungen der S^1*

Irreduzible Darstellungen der S^1 erhält man durch

$$\rho_m(z) = (z^m)$$

für ein festes $m \in \mathbb{Z}$.

Beispiel 30 *Darstellungen des Torus*

Irreduzible Darstellungen von T^n erhält man durch

$$\rho_a(z) = (e^{2\pi i \langle a,z \rangle})$$

für ein festes $a \in \mathbb{Z}^n$.

Lemma 30. *Alle irreduziblen Darstellungen des Torus sind von obiger Form.*

Beweis: Nach Korollar 7 sind alle irreduziblen Darstellungen 1-dimensional, geben also einen Homomorphismus $T^n \to \mathbb{C}^*$.

Die Lie-Algebra von T^n ist die abelsche Lie-Algebra $\mathbb{R}^n$ mit Exponentialabbildung

$$exp(x) = ([x_1], \ldots, [x_n]),$$

wobei die Äquivalenzklassen jeweils modulo $\mathbb{Z}$ sind. Die Lie-Algebra von $\mathbb{C}^*$ ist die abelsche Lie-Algebra $\mathbb{C}$ mit Exponentialabbildung $exp(z) = e^z$.

Sei $f\colon T^n \to C^*$ ein Homomorphismus von Lie-Gruppen. Dann ist das Differential

$$D_{\mathbb{1}} f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$$

ein (additiver) Homomorphismus, der differenzierbar und insbesondere stetig ist. Er ist also von der Form

$$D_{\mathbb{1}} f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$$

mit $a_i := D_{\mathbb{1}} f(e_i)$ für $i = 1, \ldots, n$.

Aus Lemma 18 wissen wir $f(exp(x)) = exp(D_{\mathbb{1}} f(x))$, also

$$f([x_1], \ldots, [x_n]) = e^{\sum_{i=1}^n a_i x_i}.$$

Aus $f([\mathbb{Z}^n]) = 1$ folgt, dass die $a_1, \ldots, a_n$ ganzzahlige Vielfache von $2\pi i$ sein müssen.

QED

Korollar 8. *Zu jeder Darstellung $\rho\colon T^n \to GL(m, \mathbb{C})$ gibt es $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}^n$ mit*

$$\rho = \rho_{a_1} \oplus \ldots \oplus \rho_{a_m}.$$

Definition 27. *Ein Homomorphismus*

$$\theta\colon T^n \to \mathbb{C}^*$$

heisst ein Gewicht einer Darstellung

$$\rho\colon T^n \to GL(m, \mathbb{C}),$$

wenn

$$V_\theta = \{v \in \mathbb{C}^m \colon \rho(g)v = \theta(g)v \text{ für alle } g \in T^n\} \neq 0$$

ist. V_θ heisst dann der Gewichtsraum zum Gewicht θ.

Beispiel 31 *Eine unendlich-dimensionale Darstellung des Torus*

Wir betrachten

$$L^2(T^n) = \left\{ f\colon T^n \to \mathbb{C}\colon \int_T^n |f([x])|^2 \, d\mu(x) < \infty \right\} / \sim,$$

wobei μ das Lebesgue-Maß ist und wir $f \sim g$ definieren wenn f und g fast überall übereinstimmen. $L^2(T^n)$ ist ein unendlich-dimensionaler Vektorraum, die Funktionen $f([x]) = e^{2\pi i \langle a, x \rangle}$ mit $a \in \mathbb{Z}^n$ spannen einen dicht liegenden Unterraum auf.

Eine Darstellung

$$\rho\colon T^n \to GL(L^2(T^n))$$

ist definiert durch

$$((\rho([z]))f)([x]) = f([x+z]).$$

Die Einschränkung auf den von $e^{2\pi i \langle a, x \rangle}$ für ein $a \in \mathbb{Z}^n$ aufgespannten 1-dimensionalen Unterraum ist gerade die Darstellung aus Beispiel 30.

Lemma 31. *Sei $A \in SL(2,\mathbb{Z})$ und $f_A \colon T^2 \to T^2$ die induzierte Abbildung. Dann sind äquivalent:*
i) Die (fast überall) konstanten Funktionen sind der einzige 1-dimensionale invariante Unterraum der durch $\rho(n) = (f_A^n)^*$ gegebenen Darstellung $\rho \colon \mathbb{Z} \to GL(L^2(T^2))$.
ii) f_A ist ergodisch, d.h. für jede f_A-invariante meßbare Menge $M \subset T^2$ gilt $\mu(M) = 1$ oder $\mu(M) = 0$.
iii) Kein Eigenwert von A ist eine Einheitswurzel.
iv) f_A ist eine Anosov-Abbildung.

Beweis:
i)$\Longrightarrow$iii) Sei λ ein Eigenwert von A mit $\lambda^n = 1$. Dann ist A entweder periodisch oder reduzibel.

Sei zunächst A periodisch und $m \in \mathbb{Z}^2$ ein beliebiger ganzzahliger Vektor. Wir betrachten die Funktion

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i \langle m, A^k x\rangle}.$$

Wir haben

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i \lambda^k \langle m, x\rangle}$$

und insbesondere

$$g(Ax) = \sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i \lambda^{k+1} \langle m, x\rangle} = g(x)$$

wegen $\lambda = \lambda^{n+1}$. Andererseits ist

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i \langle (A^T)^k m, x\rangle}$$

eine nicht-triviale Linearkombination von Basisvektoren aus $L^2(T^2)$ und demzufolge nicht (fast überall) konstant, im Widerspruch zu i).

Sei nun A reduzibel, dann gibt es einen ganzzahligen Eigenvektor zum Eigenwert ± 1 und derselbe Beweis funktioniert.

iii)$\Longrightarrow$ii) Sei M ist eine f_A-invariante meßbare Menge. Dann hat die charakteristische Funktion $\chi_M \in L^2(T^2)$ eine Fourier-Reihe. Der m-te Fourier-Koeffizient von $\chi_(A^{-1}M) = \rho(A)\chi_M$ ist gerade $a_{A^T m}$ und aus der A-Invarianz von Y folgt also $a_m \neq a_{(A^T)^n m}$ für alle n. Wenn die Eigenwerte von A keine Einheitswurzeln sind, sind das unendlich viele übereinstimmende Koeffizienten. Aus der Parseval-Gleichung

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^2} |a_m\,|^2 = \int_{T^2} |\ \chi_Y([x])\ |^2 \, d\mu([x]) < \infty$$

folgt aber, dass dies nur für $a_m = 0$ möglich ist. Also kommt in der Fourier-Reihe nur der konstante Term vor, χ_M ist fast überall konstant und M hat Maß 0 oder 1.

ii)$\Longrightarrow$i) Die Funktion g spanne einen invarianten 1-dimensionalen Unterraum auf, d.h. $f_A^* g = cg$. Weil f_A wegen $det(A) = 1$ volumen-erhaltend ist, muss $c = 1$ sein. Damit sind insbesondere die Subniveaumengen

$$U_C = \left\{ x \in T^2 \colon Re(g(x)) < C \right\}$$

invariant, müssen wegen Ergodizität also alle entweder Maß 0 oder Maß 1 haben. Sei

$$C_0 = sup \left\{ C \subset \mathbb{R} \colon \mu(U_C) = 1 \right\},$$

dann ist $Re(g(x)) = C_0$ fast überall. Analog beweist man, dass $Im(g(x))$ fast überall konstant ist.

Die Äquivalenz iii)$\Longleftrightarrow$iv) ist im Beweis von Lemma 24 gezeigt worden. *QED*

3.2. **Darstellungen von Lie-Algebren und Komplexifizierungen.**

3.2.1. *Assoziierte Darstellungen.*

Definition 28. *Eine (endlich-dimensionale, reelle) Darstellung einer abstrakten Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist ein Homomorphismus von Lie-Algebren*

$$\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}).$$

Definition 29. *Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g} = T_{\mathbb{1}}G$. Die zu einer Darstellung*

$$\rho\colon G \to GL(n, \mathbb{R})$$

assoziierte Darstellung von Lie-Algebren

$$\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$$

ist $\pi = D_{\mathbb{1}}\rho$, d.h., sie ist gegeben durch

$$\pi(X) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\rho(exp(tX))$$

für $X \in \mathfrak{g}$.

Lemma 32. *Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe. Dann ist eine Darstellung*

$$\rho\colon G \to GL(n, \mathbb{R})$$

genau dann irreduzibel, wenn die assoziierte Darstellung

$$\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$$

irreduzibel ist.

Beweis: Sei ρ irreduzibel und sei $W \subset \mathbb{R}^n$ ein invarianter Unterraum von π. Sei $X \in \mathfrak{g}$ und $A = \pi(X)$. Dann ist $Aw \in W$ und damit auch

$$e^A w = w + Aw + \ldots \in W$$

für alle $w \in W$. Wegen Lemma 18 folgt

$$\rho(exp(X))w \in W.$$

W ist also invariant unter allen Matrizen der Form $\rho(exp(X))$. Weil exp ein lokaler Diffeomorphismus ist und sich in einer zusammenhängenden Lie-Gruppe jedes Element als Produkt von Elementen aus einer gegebenen Umgebung von $\mathbb{1}$ zerlegen lässt, folgt ρ-Invarianz von W, woraus wegen der Irreduzibilität von ρ dann $W = 0$ oder $W = \mathbb{R}^n$ und damit die Irreduzibilität von π folgt.

Umgekehrt sei π irreduzibel und $W \subset \mathbb{R}^n$ ein ρ-invarianter Unterraum. Für alle $X \in \mathfrak{g}, t \in \mathbb{R}, w \in W$ ist dann

$$\rho(exp(tX)) \in W$$

und damit

$$\pi(X) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\rho(exp(tX))w \in W.$$

W ist also π-invariant, woraus wegen der Irreduzibilität von π $W = 0$ oder $W = \mathbb{R}^n$ und damit Irreduzibilität von ρ folgt. *QED*

3.2.2. *Reelle Formen.*

Definition 30. *Eine komplexe Lie-Algebra ist eine Lie-Algebra, die ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und deren Lie-Klammer $\mathbb{C}$-bilinear ist.*

Definition 31. *Die Komplexifizierung einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist der $\mathbb{C}$-Vektorraum*

$$\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

mit der selben Lie-Klammer.

Beispiel 32 *Komplexifizierung der Lie-Algebra der linearen Gruppe*
Die Komplexifizierung von $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ ist $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, die Komplexifizierung von $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ ist $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$.

Beispiel 33 *Komplexifizierung der Lie-Algebra der orthogonalen Gruppe*
Die Komplexifizierung von $\mathfrak{o}(n)$ ist $\mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$, die Lie-Algebra der Lie-Gruppe

$$O(n,\mathbb{C}) = \left\{A \in GL(n,\mathbb{C}) \colon AA^T = \mathbb{1}\right\}.$$

Beispiel 34 *Komplexifizierung der Lie-Algebra der unitären Gruppe*
Die Komplexifizierung von $\mathfrak{u}(n)$ ist $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Tatsächlich kann man jedes $A \in Mat(n,\mathbb{C})$ eindeutig als

$$A = \frac{A - \overline{A}}{2} + \frac{A + \overline{A}}{2} \in \mathfrak{u}(n) + i\mathfrak{u}(n)$$

zerlegen.

Analog erhält man, dass $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ die Komplexifizierung von $\mathfrak{su}(n)$ ist.

Definition 32. *Eine reelle Form einer komplexen Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ ist eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mit*

$$\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathfrak{h}.$$

Beispiel 35 *Reelle Formen von $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$.*
Die komplexe Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ hat die reellen Formen $\mathfrak{su}(n)$ und $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$.

Lemma 33. *Es gibt eine Injektion von den Darstellungen einer Lie-Algebra in die $\mathbb{C}$-linearen Darstellungen ihrer Komplexifizierung.*

Beweis: Aus einer Darstellung von $\mathfrak{g}$ erhält man durch Tensorieren mit $\mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-lineare Darstellung von $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Unterschiedliche Darstellungen haben unterschiedliche Komplexifizierungen. *QED*

Die Darstellungstheorien von $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ und $\mathfrak{su}(n)$ sind also jeweils in der komplexen Darstellungstheorie von $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ enthalten.

3.3. **Darstellungstheorie der $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.** $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ ist die Lie-Algebra der (2×2)-Matrizen mit Spur 0. Sie wird als komplexer Vektorraum aufgespannt von den Matrizen

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

diese genügen den Relationen

$$[X,Y] = H \quad [H,X] = 2X \quad [H,Y] = -2Y$$

In der Quantenmechanik berechnet man Eigenwerte des Drehimpulsoperators $L = \frac{h}{i} x \times \nabla$, wobei x Multiplikation mit den Ortskoordinaten und ∇ die Ableitung nach den Ortskoordinaten bezeichnet. Seien L_x, L_y, L_z die drei Komponenten von

L und $L_\pm = L_x \pm i L_y$, dann gilt $[L_z, L_\pm] = \pm h L_\pm$ und $[L_+, L_-] = 2hL_z$. Nach einer passenden Skalierung der Basisvektoren ist die Drehimpulsalgebra also isomorph zu $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Wir wollen die irreduziblen komplexen Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ klassifizieren.

Satz 7. *Es gibt zu jeder natürlichen Zahl m eine bis auf Isomorphie eindeutige irreduzible $(m+1)$-dimensionale Darstellung V_m der $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Diese ist bestimmt durch eine Basis $\{v_0,\ldots,v_m\}$ mit den folgenden Eigenschaften:*
$hv_i = (m-2i)v_i$ *für* $i = 0,\ldots,m$
$xv_0 = 0, yv_m = 0$
$xv_i = i(m-i+1)v_{i-1}$ *für* $i = 1,\ldots,m$
$yv_i = v_{i+1}$ *für* $i = 0,\ldots,m-1$
Hierbei bezeichnen $h, x, y \in \mathfrak{gl}(V_m) \simeq \mathfrak{gl}(m+1,\mathbb{C})$ die Bilder von $H, X, Y \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ unter der Darstellung.

Beweis: Man rechnet leicht nach, dass durch obige Eigenschaften eine wohldefinierte Darstellung von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ eindeutig festgelegt wird. Wir zeigen jetzt, dass jede irreduzible Darstellung von obiger Form ist.

Es sei V eine irreduzible Darstellung. Weil $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, gibt es einen Eigenvektor v von h, also

$$hv = \lambda v.$$

Aus $[h,x] = 2x$ folgt dann

$$hxv = (\lambda+2)xv,$$

also ist xv ein Eigenvektor von h zum Eigenwert $\lambda+2$. Durch Induktion folgt, dass $x^i v$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda + 2i$ ist.

Weil h nur endlich viele Eigenwerte hat, muss es ein minimales i_0 mit

$$x^{i_0} v = 0$$

geben. Setze

$$v_0 = x^{i_0 - 1} v$$

und

$$v_i = y^i v_0$$

für $i \geq 1$. Aus $[h,y] = -2y$ folgt, dass v_i Eigenvektor von h zum Eigenwert

$$\lambda + 2(i_0 - i - 1)$$

ist. Es gibt also wieder ein minimales m mit $v_{m+1} = 0$ und die Vektoren $v_0,\ldots,v_m$ sind linear unabhängig.

Die Gleichung für xv_i folgt durch vollständige Induktion:

$$xv_{i+1} = xyv_i = hv_i + yxv_i = (n-2)v_i + i(n-i+1)v_i = (i+1)(n-i)v_i.$$

Der von $v_0,\ldots,v_m$ aufgespannte Unterraum ist unter x, y und damit auch $h = [x,y]$ invariant und damit wegen der Irreduzibilität bereits der ganze Darstellungsraum. Insbesondere bilden $v_0,\ldots,v_m$ eine Basis.

Aus

$$\mathrm{Spur}(h) = \mathrm{Spur}([x,y]) = 0$$

folgt

$$\lambda + 2(i_0 - 1) + \lambda + 2(i_o + 2m - 1) = 0$$

und damit

$$m = \lambda + 2(i_0 - 1)$$

und damit die erste Behauptung. *QED*

Die $(m+1)$-dimensionale Darstellung von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ lässt sich in der Basis

$$\left\{\frac{1}{i!}v_i \colon 0 \le i \le m\right\}$$

explizit angeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \mathrm{diag}(m, m-2, \ldots, -m)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \mathrm{diag}^+(m, m-1, \ldots, 1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \mathrm{diag}^-(1, 2, \ldots, m)$$

wobei $\mathrm{diag}^+(v)$ bzw. $\mathrm{diag}^-(v)$ diejenigen Matrizen bezeichnet, deren erste Über- bzw. Unterdiagonale v ist und deren sonstige Einträge Null sind.

Zum Beispiel ist V_0 die triviale Darstellung, V_1 die kanonische Darstellung von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}^2$ und wir werden später sehen, dass V_2 die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ ist.

Die $(m+1)$-dimensionale Darstellung von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ ist die assoziierte Darstellung zu einer irreduziblen Darstellung

$$SL(2,\mathbb{C}) \to GL(m+1,\mathbb{C}),$$

die wie folgt konstruiert wird.

Es sei V_m der Vektorraum der komplexwertigen homogenen Polynome vom Grad m in zwei Variablen, also der von

$$x^m, x^{m-1}y, \ldots, xy^{m-1}, y^m$$

aufgespannte komplexe Vektorraum. $A \in SL(2,\mathbb{C})$ wirkt auf V_m durch

$$(AP)(x,y) := P(A^{-1}(x,y)).$$

3.4. **Adjungierte Darstellung und Killingform.**

3.4.1. *Ad und ad.* Sei G eine Lie-Gruppe und $g \in G$. Die Konjugation mit g ist die Abbildung

$$c_g = l_g r_{g^{-1}} \colon G \to G$$

$$c_g(h) = ghg^{-1}.$$

Wir haben $c_g(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ und betrachten das Differential

$$D_{\mathbb{1}} c_g \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}.$$

Wegen $D_{\mathbb{1}} c_g \circ D_{\mathbb{1}} c_{g^{-1}} = id$ ist $D_{\mathbb{1}} c_g$ eine invertierbare lineare Abbildung. Die so erhaltene Abbildung heisst adjungierte Abbildung

$$Ad \colon G \to GL(\mathfrak{g})$$

$$Ad(g) = D_{\mathbb{1}} c_g.$$

Aus der Kettenregel folgt, dass Ad ein Homomorphismus ist. Das Differential in $\mathbb{1}$ bezeichnen wir mit

$$ad \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

$$ad = D_{\mathbb{1}} Ad.$$

Lemma 34. *ad ist ein Lie-Algebren-Homomorphismus und es gilt*

$$Ad(exp(X)) = exp(ad(X))$$

für alle $X \in \mathfrak{g}$.

Beweis: Nach Lemma 18 gilt das für das Differential in $\mathbb{1}$ jedes Lie-Gruppen-Homomorphismus. *QED*

Lemma 35. *Sei $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ eine Matrix-Gruppe. Dann ist*

$$Ad(g)\colon X \to gXg^{-1}$$

$$ad(X)\colon Y \to [X, Y]$$

für alle $g \in G, X, Y \in \mathfrak{g}$.

Beweis:

$$Ad(g)(X) = \frac{d}{dt}|_{t=0} c_g(e^{tX}) = \frac{d}{dt}\ |_{t=0}\ ge^{tX}g^{-1} = gXg^{-1}$$

und damit

$$ad(X)(Y) = \frac{d}{dt}|_{t=0} Ad(e^{tX})(Y) = \frac{d}{dt}\ |_{t=0}\ e^{tX}Ye^{-tX} = XY - YX,$$

wobei wir im letzten Schritt die Produktregel angewandt haben. *QED*

Der erste Teil dieses Lemmas hat keine sinnvolle Verallgemeinerung für allgemeine Lie-Gruppen, der zweite Teil dieses Lemmas aber läßt sich auf beliebige Lie-Gruppen verallgemeinern.

Lemma 36. *Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Dann ist*

$$ad(X)(Y) = [X, Y]$$

für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Beweis:

$$ad(X)(Y) = \frac{d}{dt}|_{t=0} Ad(e^{tx})(Y) =$$

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} \frac{d}{ds}\ |_{s=0}\ c_{e^{tX}} e^{sY} = \frac{d}{dt}\ |_{t=0}\ \frac{d}{ds}\ |_{s=0}\ e^{tX}e^{sY}e^{-tX} = [X, Y],$$

wobei man die letzte Gleichung aus der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel Satz 4 erhält. *QED*

Korollar 9. *Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und $f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ein Lie-Algebren-Isomorphismus. Dann ist*

$$ad(f(X)) = f \circ ad(X) \circ f^{-1}$$

für alle $X \in \mathfrak{g}$.

Beweis:

$$ad(f(X))(Y) = [f(X), Y] = f(\left[X, f^{-1}(Y)\right]) = f(ad(X)(f^{-1}(Y))).$$

QED

3.4.2. *Die Killingform.*

Definition 33. *Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Die Killingform*

$$B\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$$

ist definiert durch

$$B(X,Y) = Spur(ad(X) \circ ad(Y)).$$

Beispiel 36 *Killingform von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$*
Mit Hilfe der Basis

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

berechnet man, dass auf $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$

$$B(X,Y) = 4Spur(XY)$$

gilt und sich die Killingform in dieser Basis also als quadratische Form $8H^2 + 8XY$ darstellen läßt.
Allgemeiner ist

$$B(X,Y) = 2nSpur(XY)$$

auf $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$.

Lemma 37. *a) B ist eine symmetrische Bilinearform.*
b) B ist $Ad(G)$-invariant, d.h. es gilt

$$B(Ad(g)X, Ad(g)Y) = B(X,Y)$$

für alle $g \in G$ und $X, Y \in \mathfrak{g}$.
c) Für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ ist

$$B(ad(Z)X, Y) = -B(X, ad(Z)Y).$$

Beweis: a) Bilinearität und Symmetrie folgen aus den entsprechenden Eigenschaften der Spur.
b) Wir wenden Korollar 9 auf $f = Ad(g)$ an und erhalten

$$B(Ad(g)X, Ad(g)Y) = Spur(ad(Ad(g)X) \circ ad(Ad(g)Y))$$
$$= Spur(Ad(g) \circ ad(X) \circ Ad(g)^{-1} \circ Ad(g) \circ ad(Y) \circ Ad(g)^{-1})$$
$$= Spur(ad(X) \circ ad(Y)) = B(X,Y).$$

c) Durch zweimalige Anwendung der Jacobi-Identität erhält man

$$[ad(Z), ad(X) \circ ad(Y)] = ad(ad(Z)X) \circ ad(Y) + ad(X) \circ ad(ad(Z)Y).$$

Die linke Seite ist ein Kommutator und hat deshalb verschwindende Spur. QED

3.4.3. *Halbeinfache und kompakte Lie-Algebren.*

Definition 34. *Eine Lie-Algebra heißt halbeinfach, wenn ihre Killingform eine nicht ausgeartete Bilinearform ist. Eine Lie-Gruppe heißt halbeinfach, wenn ihre Lie-Algebra halbeinfach ist.*

Beispiel 37 *Halbeinfachheit von $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$*
Die Killingform

$$B(X,Y) = 2nSpur(XY)$$

ist nicht ausgeartet, $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ ist also halbeinfach.

Satz 8. *Sei G eine kompakte, halbeinfache Lie-Gruppe. Dann ist die Killingform ihrer Lie-Algebra negativ definit.*

Beweis: Wenn G kompakt ist, dann gibt es nach Lemma 27 zu jeder Darstellung ρ ein ρ-invariantes Skalarprodukt. Wir wenden dies an auf $\rho = Ad$ und bekommen in einer Orthonormalbasis eines Ad-invarianten Skalarprodukts

$$Ad(g) \in O(n)$$

für alle $g \in G$. Wegen

$$e^{tad(X)} = Ad(e^{tX}) \in O(n)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ folgt

$$ad(X) \in \mathfrak{o}(n)$$

für alle $X \in \mathfrak{g}$.

Insbesondere sind die Eigenwerte von $ad(X)$ rein imaginär, haben also reelle, nichtpositive Quadrate, woraus

$$B(X,X) = Spur(ad(X)^2) \leq 0$$

folgt. Die Killingform ist also negativ semi-definit.

Wenn G halbeinfach ist, ist die Killingform nicht ausgeartet. Also ist sie sogar negativ definit. *QED*

3.5. **Darstellungstheorie von $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$.**

Definition 35. *Eine Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h}$ einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist eine Unteralgebra, die nilpotent und selbstnormalisierend ist. Es soll also ein $n \in N$ geben, so dass*

$$ad(X_1)\dots ad(X_n)|_{\mathfrak{h}} = 0$$

für alle $X_1,\dots,X_n \in \mathfrak{h}$ gilt, und es soll gelten: aus

$$[X,Y] \in \mathfrak{h}\ \forall Y \in \mathfrak{h}$$

folgt $X \in \mathfrak{h}$.

Lemma 38. *Eine Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ ist die abelsche Lie-Algebra der Diagonalmatrizen mit Spur 0.*

Beweis: $\mathfrak{h}$ ist abelsch und insbesondere nilpotent.

Wenn eine Matrix mit allen Matrizen der Form $e_{ii} - e_{jj}$ kommutiert, dann ist insbesondere $a_{ij} = -a_{ij}$, also $a_{ij} = 0$, für alle $i \neq j$. Also ist $\mathfrak{h}$ selbstnormalisierend. *QED*

Lemma 39. *Eine Basis des Duals $\mathfrak{h}^*$ der Cartan-Algebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ sind die Abbildungen*

$$R_{i,i+1}(diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)) = \lambda_i - \lambda_{i+1}, i = 1\dots,n-1.$$

Definition 36. *Sei $\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Eine lineare Abbildung*

$$\lambda\colon \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$$

aus dem Dualraum der Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h}$ heißt Gewicht von π, wenn der Gewichtsraum

$$V_\lambda = \{v \in V : \pi(h)v = \lambda(h)v\ \forall h \in \mathfrak{h}\}$$

nicht nur aus dem Nullvektor besteht.

Beispiel 38 *Gewichte der Darstellungen von* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$
Sei $H = diag(1,-1)$ der Erzeuger der Cartan-Unteralgebra der Diagonalmatrizen

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}).$$

Die irreduzible $(m+1)$-dimensionale Darstellung von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ hat die $m+1$ Gewichte $\lambda_0,\ldots,\lambda_m$ mit

$$\lambda_i(H) = m - 2i.$$

Definition 37. *Die Kowurzeln R der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ sind die Gewichte der adjungierten Darstellung*

$$ad\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

$$ad(X)(Y) = [X,Y].$$

Beispiel 39 *Kowurzeln von* $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$
Für jedes Paar $i \neq j$ ist

$$R_{ij}(diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)) = \lambda_i - \lambda_j$$

eine Kowurzel von $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$. Der Gewichtsraum

$$V_{R_{ij}} = \{v \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})\colon\ [h,v] = R_{ij}(h)v\ \forall h \in \mathfrak{h}\}$$

ist 1-dimensional und wird von der Elementarmatrix e_{ij} aufgespannt.

Definition 38. *Ein Element $\alpha \in \mathfrak{h}$ heißt Wurzel der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, wenn die Abbildung $\alpha^\vee \in \mathfrak{h}^*$ definiert durch*

$$\alpha^\vee(x) = 2\frac{B(x,\alpha)}{B(\alpha,\alpha)}\ \forall x \in \mathfrak{h}$$

mit der Killingform $B(x,y)$, eine Kowurzel ist.

Beispiel 40 *Wurzeln von* $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$
Für jedes Paar $i \neq j$ ist

$$\alpha_{ij} = e_{ii} - e_{jj}$$

eine Wurzel von $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$: man rechnet leicht nach, dass

$$\alpha_{ij}^\vee(diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)) = \lambda_i - \lambda_j$$

ist.

Definition 39. *Wir definieren die Menge R^+ der "positiven Wurzeln" von $\mathfrak{g}$ als eine "Basis", aus der sich alle anderen Wurzeln als eindeutige Linearkombination gewinnen lassen.*

Dies erlaubt die Definition einer Teilordnung auf den Gewichten einer gegebenen Darstellung durch

$$\lambda \leq \mu \Longleftrightarrow \lambda(\alpha) \leq \mu(\alpha)\ \forall \alpha \in R^+.$$

Ein Gewicht heißt ein "höchstes Gewicht", wenn es kein größeres Gewicht bzgl. dieser Teilordnung gibt.

Weiterhin heißt eine lineare Abbildung $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ ein "integrales Element", wenn

$$\lambda(\alpha) \in \mathbb{Z}\ \ \forall \alpha \in R$$

gilt. Sie heißt ein "dominantes integrales Element", wenn

$$\lambda(\alpha) \in \mathbb{N}\ \ \forall \alpha \in R^+$$

ist.

Beispiel 41 *Positive Wurzeln von* $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$

Als positive Wurzeln von $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ können wir

$$R^+ := \{\alpha_{i,i+1}, i = 1, \ldots, n-1\}$$

wählen. Jedes α_{ij} lässt sich als eindeutige Linearkombination aus diesen darstellen.

Satz 9. (Satz vom höchsten Gewicht) *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra. Dann gilt für endlich-dimensionale komplexe Darstellungen von* $\mathfrak{g}$*:*

- *Jede irreduzible Darstellung hat ein eindeutiges höchstes Gewicht.*
- *Zwei irreduzible Darstellungen mit demselben höchsten Gewicht sind äquivalent.*
- *Das höchste Gewicht einer irreduziblen Darstellung ist ein dominantes integrales Element.*
- *Jedes dominante integrale Element ist das höchste Gewicht einer irreduziblen Darstellung.*

Beweis: Dieser Satz wurde 1913 von Èlie Cartan bewiesen. Einen Beweis in heutiger Sprache findet man in Kapitel 5.2 von *Anthony Knapp: "Lie Groups Beyond an Introduction", Birkhäuser Basel 2002, ISBN 978-0-8176-4259-4.* *QED*

Beispiel 42 *Darstellungen der* $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Eine Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ist

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C} \right\},$$

als positive Wurzel hat man

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ hat man ein dominantes integrales Element λ gegeben durch die Abbildung

$$\lambda(\alpha) = m.$$

Dieses entspricht der bekannten $(m+1)$-dimensionalen irreduziblen Darstellung.

Beispiel 43 *Darstellungen der* $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$

Eine Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ ist

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C} \colon \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \right\}.$$

Als positive Wurzeln haben wir

$$\alpha_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\alpha_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

die weiteren Wurzeln sind $\alpha_{13} = \alpha_{12} + \alpha_{23}$ sowie $-\alpha_{12}, -\alpha_{23}, -\alpha_{13}$.

Für jedes Paar $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ hat man ein dominantes integrales Element $\lambda_{m,n}$ gegeben durch die Abbildung

$$\lambda_{m,n}(\alpha_{12}) = m, \lambda_{m,n}(\alpha_{23}) = n.$$

Die zugehörige irreduzible Darstellung $\pi_{m,n}$ lsst sich explizit angeben wie folgt. Sei $Sym^m(V)$ der Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad m in 3 Variablen. Seine Dimension ist $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$. $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ wirkt sowohl auf $Sym^m(V)$ als auch durch die duale Darstellung auf $Sym^m(V^*)$.

Wir betrachten die durch

$$\iota_{m,n}(v_1 \ldots v_m \otimes v_1^* \ldots v_n^*) = \sum_{i,j} v_j^*(v_i) v_1 \ldots \widehat{v_i} \ldots v_m \otimes v_1^* \ldots \widehat{v_j^*} \ldots v_n^*$$

definierte Kontraktion

$$Sym^m(V) \otimes Sym^n(V^*) \to Sym^{m-1}(V) \otimes Sym^{n-1}(V^*).$$

Der Vektorraum $Ker(\iota_{m,n})$ hat Dimension

$$\frac{1}{2}(m^2 n + mn^2 + m^2 + 4mn + n^2 + 3m + 3n + 2)$$

und man kann zeigen, dass er eine irreduzible Darstellung zum höchsten Gewicht $\lambda_{m,n}$ ist.

Zum Beispiel ist $\pi_{0,0}$ die triviale Darstellung, $\pi_{1,0}$ die definierende Darstellung auf $V = \mathbb{C}^3$, $\pi_{0,1}$ die duale Darstellung auf V^* und $\pi_{1,1}$ die adjungierte Darstellung ad.

4. Riemannsche Geometrie auf Lie-Gruppen

Für Grundbegriffe der Riemannschen Geometrie, insbesondere den Levi-Civita-Zusammenhang und die verschiedenen Krümmungsbegriffe verweisen wir auf den Anhang Abschnitt 7.4.

4.1. **Links-invariante Metriken auf Lie-Gruppen.**

Definition 40. *Eine Riemannsche Metrik g auf einer Lie-Gruppe G heisst links-invariant, wenn für alle $h \in G$*

$$g(v,w) = g(D_p l_h(v), D_p l_h(w))$$

für alle $v, w \in T_pG, p \in G$ gilt.

Lemma 40. *Sei G eine Lie-Gruppe und g_0 ein Skalarprodukt auf ihrer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Dann gibt es eine eindeutige links-invariante Riemannsche Metrik g mit*

$$g|_{T_1 G} = g_0.$$

Beweis: Für $v, w \in T_h G$ ist $g(v,w)$ eindeutig festgelegt durch die Bedingung

$$g(v,w) = g_0(D_h l_{h^{-1}} v, D_h l_{h^{-1}} w).$$

QED

Lemma 41. *Sei g eine links-invariante Riemannsche Metrik auf einer Lie-Gruppe G. Dann sind auch der Levi-Civita-Zusammenhang ∇ und seine Krümmungsform R invariant unter der Linkswirkung von G.*

Beweis: Das folgt aus der Formel für den Levi-Civita-Zusammenhang und

$$[Dl_h Y, Dl_h Z] = Dl_h [Y,Z].$$

QED

Lemma 42. *Sei g eine links-invariante Riemannsche Metrik auf einer Lie-Gruppe G, ∇ ihr Levi-Civita-Zusammenhang und R seine Krümmungsform. Dann gilt für alle links-invarianten Vektorfelder X, Y, Z, W*

$$2\nabla_X Y = [X, Y] - ad(X)^* Y - ad(Y)^* X$$

$$g(R(X, Y)Z, W) = g(\nabla_X Z, \nabla_Y W) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X W) - g(\nabla_{[X,Y]} Z, W).$$

Beweis: Aus Links-Invarianz der Vektorfelder und der Riemannschen Metrik folgt, dass $g(X, Y), g(X, Z), g(Y, Z)$ jeweils konstante Funktionen und ihre Ableitungen also Null sind. Damit vereinfacht sich die Koszul-Formel zu

$$2g(\nabla_X Y, Z) = -g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]),$$

was eine Umformulierung der ersten Gleichung ist.

Aus demselben Grund ist

$$Xg(\nabla_Y Z, W) = 0, Yg(\nabla_X Z, W) = 0,$$

mit der Leibnizregel also

$$g(\nabla_X \nabla_Y Z, W) + g(\nabla_Y Z, \nabla_X W) = 0, g(\nabla_Y \nabla_X Z, W) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y W) = 0,$$

woraus durch Aufsummieren und mit

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

die zweite Gleichung folgt. *QED*

Beispiel 44 *Invariante Metriken auf dem Torus*

Links-invariante Vektorfelder auf dem Torus haben nach Beispiel 17 konstante Koeffizienten. Daraus folgt mit Lemma 10, dass die Kommutatoren links-invarianter Vektorfelder verschwinden. Für eine links-invariante Metrik auf dem Torus gibt Lemma 42 dann also

$$\nabla_X Y = 0$$

für alle links-invarianten Vektorfelder X, Y. Insbesondere gilt für die Schnittkrümmung links-invarianter Metriken

$$K \equiv 0.$$

4.2. Bi-invariante Metriken auf Lie-Gruppen.

Definition 41. *Eine Riemannsche Metrik g auf einer Lie-Gruppe G heisst bi-invariant, wenn sie rechts- und links-invariant ist, wenn also für alle $h \in G$*

$$g(D_p r_h(v), D_p r_h(w)) = g(v, w) = g(D_p l_h(v), D_p l_h(w))$$

für alle $v, w \in T_p G, p \in G$ gilt.

Lemma 43. *Sei G eine Lie-Gruppe und g_0 ein Ad-invariantes Skalarprodukt auf ihrer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Dann gibt es eine eindeutige bi-invariante Riemannsche Metrik g mit*

$$g|_{T_{\mathbb{1}} G} = g_0.$$

Beweis: Wie im Beweis von Lemma 40 ist die links-invariante Metrik g für $v, w \in T_h G$ eindeutig festgelegt durch die Bedingung

$$g(v, w) = g_0(D_h l_{h^{-1}} v, D_h l_{h^{-1}} w).$$

Wegen

$$Ad(h) = Dr_h Dl_h^{-1}$$

ist für eine links-invariante Metrik die Rechts-Invarianz von g äquivalent zur Ad-Invarianz von g_0. *QED*

Korollar 10. *Auf einer kompakten, halbeinfachen Lie-Gruppe gibt es eine bi-invariante Riemannsche Metrik.*

Beweis: Nach Lemma 37 ist die Killingform Ad-invariant und nach Satz 8 ist sie negativ definit. Also ist das Negative der Killingform ein Ad-invariantes Skalarprodukt und die Behauptung folgt aus Lemma 43. QED

Satz 10. *Für eine Lie-Gruppe mit bi-invarianter Riemannscher Metrik gilt*

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$$

$$K(X,Y) = \frac{1}{4} \parallel [X,Y] \parallel^2$$

$$Ric(X,X) = \frac{1}{4}\sum_{i=2}^{n} \parallel [X,e_i] \parallel^2$$

$$Scal = \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n} \parallel [e_i,e_j] \parallel^2$$

für orthonormale Vektoren X,Y und eine Orthonormalbasis $e_1,\ldots,e_n$ mit $e_1 = X$.

Beweis: Bi-Invarianz der Riemannschen Metrik g bedeutet, dass $Ad(h)$ eine orthogonale Abbildung bzgl. $g_0 = g|_{\mathfrak{g}}$ ist für alle $h \in G$. Damit muss $ad(X)$ bzgl. g_0 schief-adjungiert sein, d.h.

$$ad(X)^* = -ad(X)$$

für alle $X \in \mathfrak{g}$. Somit ist

$$ad(X)^*Y + ad(Y)^*X = -ad(X)Y - ad(Y)X = -[X,Y] - [Y,X] = 0$$

und die Formel aus Lemma 42 vereinfacht sich zu

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y].$$

Mit der Definition der Schnittkrümmung und der Formel für links-invariante Metriken aus Lemma 42 gibt das dann

$$\begin{aligned} K(X,Y) = g(R(X,Y)Y,X) &= g(\nabla_X Y, \nabla_Y X) - g(\nabla_Y Y, \nabla_X X) - g(\nabla_{[X,Y]}Y, X) \\ &= \frac{1}{4}g([X,Y],[Y,X]) - \frac{1}{4}g([Y,Y],[X,X]) - \frac{1}{2}g([[X,Y],Y],X) \\ &= \frac{1}{4}g([X,Y],[Y,X]) - \frac{1}{2}g([[X,Y],Y],X). \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} g([[X,Y],Y],X) &= g(-ad(Y)[X,Y],X) = g(-[X,Y], ad(Y)^*X) \\ &= g(-[X,Y], -ad(Y)X) = g([X,Y],[Y,X]) \end{aligned}$$

vereinfacht sich das zu

$$K(X,Y) = -\frac{1}{4}g([X,Y],[Y,X]) = \frac{1}{4} \parallel [X,Y] \parallel^2.$$

Die anderen beiden Gleichungen ergeben sich dann unmittelbar durch Einsetzen in die Definition der Ricci- und Skalarkrümmung. QED

Beispiel 45 *Metrik konstanter Krümmung auf SU(2)*

Für die durch das Negative der Killingform gegebene Riemannsche Metrik auf $SU(2)$ ist $K \equiv 1$ und man kann zeigen, dass $SU(2)$ mit dieser Metrik isometrisch zur Einheitssphäre $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ ist.

4.3. **Isometriegruppen.**

Definition 42. *Eine Isometrie einer Riemannschen Mannigfaltigkeit* (M, g) *ist ein Diffeomorphismus*

$$f : M \to M$$

mit

$$g(D_p f(v), D_p f(w)) = g(v, w)$$

für alle $v, w \in T_p M, p \in M$.

Definition 43. *Die Isometriegruppe* $Isom(M)$ *einer Riemannschen Mannigfaltigkeit* (M, g) *ist die Menge aller Isometrien mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung.*

Für eine orientierbare Mannigfaltigkeit M *bezwichnen wir mit* $Isom^+(M)$ *die Untergruppe der orientierungs-erhaltenden Isometrien.*

Lemma 44. *Sei* (M, g) *eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit und* $x \in M$. *Wenn für zwei Isometrien* $f_1, f_2 \in Isom(M)$

$$f_1(x) = f_2(x) \text{ und } D_x f_1 = D_x f_2$$

gilt, dann ist

$$f_1 = f_2.$$

Beweis: Eine Isometrie bildet Geodäten in Geodäten ab, denn die Christoffelsymbole bzgl. der lokalen Koordinatenvektorfelder $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ und $D_p f(\frac{\partial}{\partial x_1}), \ldots, D_p f(\frac{\partial}{\partial x_n})$ sind dieselben und die lokalen Geodätengleichungen hängen nur von den Christoffelsymbolen ab. Insbesondere ist also

$$f_i(exp_x(tv)) = exp_{f_i(x)}(tD_x f_i(v))$$

für $i = 1, 2$, woraus $f_1 = f_2$ auf einer offenen Umgebung von x folgt.

Sei

$$U = \{y \in M : f_1(y) = f_2(y), D_y f_1 = D_y f_2\},$$

dann können wir mit dem selben Argument zeigen, dass U eine offene Umgebung jedes Punktes $y \in U$ enthält, also eine offene Menge ist. Andererseits ist U abgeschlossen, denn aus

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n$$

und

$$f_1(x_n) = f_2(x_n), D_{x_n} f_1 = D_{x_n} f_2$$

folgt

$$f_1(x) = f_2(x), D_x f_1 = D_x f_2.$$

Weil M zusammenhängend ist, muss $U = M$ sein.

QED

Definition 44. *Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit heisst geodätisch vollständig, wenn jede Geodäte auf ganz* $\mathbb{R}$ *definiert ist.*

Satz 11. (Satz von Myers-Steenrod)
Die Isometriegruppe einer geodätisch vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit ist eine Lie-Gruppe.

Beweis: Die Beweisidee ist die Folgende. Betrachte einen Punkt $x \in M$ und seine Exponentialabbildung exp_x. Die Bilder der 1-dimensionalen Unterräume in $T_x M$ sind genau die Geodäten durch x. Geodätische Vollständigkeit heisst, dass jeder Punkt in der Zusammenhangskomponente von x auf einer solchen Geodäten durch x liegt.

Wähle nun $n = \dim(M)$ linear unabhängige Vektoren in T_xM und bezeichne mit $p_1, \ldots, p_n$ ihre Bildpunkte unter $\exp_x$. Eine Isometrie bildet Geodäten in Geodäten ab und demzufolge ist eine Isometrie durch die Bilder von $x, p_1, \ldots, p_n$ bereits eindeutig festgelegt. Wir erhalten also eine Einbettung von $Isom(M)$ in M^{n+1} und man kann zeigen, dass das Bild eine Untermannigfaltigkeit ist und die Gruppenoperationen differenzierbar sind. Die Einzelheiten des Beweises findet man in *S. B. Myers, N. E. Steenrod: "The group of isometries of a Riemannian manifold." Ann. of Math. (2) 40 (1939), no. 2, 400-416.* *QED*

Beispiel 46 *Die Isometriegruppe der Sphäre*

$$S^n = \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\right\}$$

mit der durch Einschränkung der Euklidischen Metrik

$$dx_1^2 + \ldots + dx_{n+1}^2$$

gegebenen Riemannschen Metrik ist die orthogonale Gruppe

$$O(n+1).$$

Die Gruppe der orientierungserhaltenden Isometrien ist

$$SO(n+1).$$

Eine orthogonale Abbildung A bildet jeden Tangentialraum T_xS^n auf $T_{Ax}S^n$ ab und ist eine Isometrie der euklidischen Metrik, mithin auch deren Einschränkung.

Wir zeigen nun, dass umgekehrt jede Isometrie der Sphäre die Einschränkung einer orthogonalen Abbildung ist. Sei $f \in Isom(S^n)$. Betrachte $x = (0, \ldots, 0, 1) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und die Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ von T_xS^n.

Zu jedem anderen Punkt $y \in S^n$ und jeder Orthonormalbasis $f_1, \ldots, f_n$ dessen Tangentialraums T_yS^n gibt es eine eindeutige Abbildung $A \in O(n+1)$, die x auf y und $e_1, \ldots, e_n$ auf $f_1, \ldots, f_n$ abbildet. Tatsächlich ist $x, e_1, \ldots, e_n$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^{n+1}$ und dasselbe gilt für $y, f_1, \ldots, f_n$ wegen $T_yS^n = y^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Insbesondere gibt es eine solche Abbildung $A_f \in O(n+1)$ für $y = f(x)$ und das Bild der Standardbasis unter D_xf. Weil aber nach Lemma 44 eine Isometrie durch diese Daten bereits eindeutig festgelegt ist, muss $f = A_f$ sein.

Beispiel 47 *Die Isometriegruppe des hyperbolischen Raumes*

$$\mathbb{H}^n = \left\{(x_0, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon -x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = -1, x_0 > 0\right\}$$

mit der durch Einschränkung der Lorentz-Metrik $-dx_0^2 + dx_1^2 + \ldots + dx_n^2$ *gegebenen Riemannschen Metrik ist*

$$O(1,n)_0 = \left\{A \in GL(n+1, \mathbb{R}) \colon A\ diag(-1, 1\ldots, 1)\ A^T = diag(-1, 1\ldots, 1), A_{00} > 0\right\}.$$

Die Gruppe der orientierungs-erhaltenden Isometrien ist

$$SO(1,n)_0 = \{A \in O(1,n)_0 \colon det(A) > 0\}.$$

Jedes $A \in O(1,n)_0$ bildet jedes $T_x\mathbb{H}^n$ auf $T_{Ax}\mathbb{H}^n$ ab und ist eine Isometrie der Lorentz-Metrik, mithin auch deren Einschränkung.

Umgekehrt, sei $f \in Isom(\mathbb{H}^n)$ und betrachte $x = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{H}^n$ und die Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ von $T_x\mathbb{H}^n$.

Zu jedem anderen Punkt $y \in \mathbb{H}^n$ und jeder Orthonormalbasis $f_1, \ldots, f_n$ dessen Tangentialraums $T_y\mathbb{H}^n$ gibt es eine eindeutige Abbildung $A \in O(1,n)_0$, die x auf y und $e_1, \ldots, e_n$ auf $f_1, \ldots, f_n$ abbildet. Tatsächlich ist $x, e_1, \ldots, e_n$ eine Orthonormalbasis bzgl. der Lorentz-Metrik und dasselbe gilt für $y, f_1, \ldots, f_n$ wegen $T_y\mathbb{H}^n = y^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Insbesondere gibt es eine solche Abbildung $A_f \in O(1,n)$ für $y = f(x)$ und das Bild der Standardbasis unter $D_x f$ und damit muss $f = A_f$ sein.

Beispiel 48 *Die Isometriegruppe der oberen Halbebene*

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \colon Im(z) > 0\}$$

mit der hyperbolischen Metrik

$$g_{hyp} = \frac{1}{(Im(z)^2)} g_{eukl}$$

ist

$$PGL(2,\mathbb{R}) = GL(2,\mathbb{R})/\mathbb{R}\mathbb{1}.$$

Die Gruppe der orientierungs-erhaltenden Isometrien $Isom^+(\mathbb{H})$ ist

$$PSL(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})/\pm\mathbb{1}.$$

$GL(2,\mathbb{R})$ wirkt auf der oberen Halbebene durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Weil die Wirkung von $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit der von $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$ übereinstimmt, faktorisiert diese Wirkung über eine Wirkung von $PGL(2,\mathbb{R})$. Wegen

$$D_z A = \frac{1}{(cz+d)^2}$$

und

$$Im(Az) = \frac{1}{|cz+d|^2} Im(z)$$

wirkt jedes A als Isometrie der Riemannschen Metrik.

Wir zeigen nun, dass jede orientierungserhaltende-Isometrie der oberen Halbebene von dieser Form ist. Sei $f \in Isom(\mathbb{H})$ und betrachte $x = i$. Wir bemerken, dass eine positiv orientierte Orthonormalbasis eines 2-dimensionalen Vektorraums bereits durch den ersten der beiden Basisvektoren festgelegt ist. Wegen Lemma 44 genügt es also zu zeigen, dass man zu jedem $y \in \mathbb{H}$ und jedem Einheitsvektor $v \in T_y\mathbb{H}$ ein (bis auf Multiplikation mit $\pm\mathbb{1}$ eindeutiges) $A \in SL(2,\mathbb{R})$ findet, welches i in y und den Vektor $(0,1)$ in v abbildet.

Zunächst kann man zu jedem Punkt $a + bi \in \mathbb{H}$ eine Matrix

$$A_{a,b} := \begin{pmatrix} \sqrt{b} & \frac{a}{\sqrt{b}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{b}} \end{pmatrix}$$

finden, welche i auf $a + bi$ abbildet. Weiterhin lässt $SO(2) \subset SL(2,\mathbb{R})$ den Punkt i fest und man kann zu jedem Einheitsvektor in $T_i\mathbb{H}$ eine Matrix aus $SO(2)$ finden, welche $(0,1)$ auf diesen Einheitsvektor abbildet. Insbesondere findet man eine solche Matrix für $D_{a+bi}A_{a,b}^{-1}v$. Die Verknüpfung dieser Matrix mit $D_{a+bi}A_{a,b}$

leistet das Gewünschte. Die Eindeutigkeit bis auf Multiplikation mit $\pm 1\!\!1$ ergibt sich durch direktes Nachrechnen.

Schließlich lässt sich eine orientierungs-ändernde Isometrie als Produkt der Abbildung $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit einer orientierungs-erhaltenden Isometrie zerlegen und gehört somit zu $PGL(2,\mathbb{R})$.

Lemma 45. *i) Die Isometriegruppen isometrischer Riemanscher Mannigfaltigkeiten sind isomorph.*

ii) Die Gruppen orientierungs-erhaltender Isometrien isometrischer orientierter Riemannscher Mannigfaltigkeiten sind isomorph.

Beweis: Sei
$$F\colon M \to N$$
eine Isometrie. Dann definiert
$$g \to F^{-1} \circ g \circ F$$
einen Isomorphismus
$$Isom(M) \to Isom(N),$$
welcher $Isom^+(M)$ in $Isom^+(N)$ abbildet. QED

Korollar 11. *$O(2,1)_0$ ist isomorph zu $PGL(2,\mathbb{R})$, $SO(2,1)_0$ ist isomorph zu $PSL(2,\mathbb{R})$.*

Beweis: $\mathbb{H}^2$ ist vermittels der Isometrie
$$(x_0,x_1,x_2) \to 2\frac{x_1(1+x_0)}{x_1^2+(x_0+x_2+1)^2} + (2\frac{x_2(1+x_0)+(1+x_0)^2}{x_1^2+(x_0+x_2+1)^2} - 1)i$$
isometrisch zur oberen Halbebene
$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}\colon Im(z) > 0\}$$
mit der hyperbolischen Metrik
$$g_{hyp} = \frac{1}{(Im(z)^2)} g_{eukl}.$$
Die Behauptung folgt durch Anwendung von Lemma 45 auf die Isometrie
$$F\colon \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}.$$
QED

Definition 45. *Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein Vektorfeld X mit Fluss Φ_t ist ein Killing-Vektorfeld, wenn alle Φ_t Isometrien sind.*

Man kann zeigen, dass der Vektorraum der Killing-Vektorfelder die Lie-Algebra der Lie-Gruppe $Isom(M)$ ist.

5. Homogene Räume

5.1. Mannigfaltigkeits-Struktur homogener Räume.

Satz 12. *Sei G eine Lie-Gruppe und*
$$H \subset G$$
eine abgeschlossene Untergruppe.

Dann ist G/H eine (Hausdorffsche) differenzierbare Mannigfaltigkeit und
$$\pi\colon G \to G/H$$
eine Submersion.

Für jeden Unterverktorraum $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ *mit*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$$

ist

$$D_0(\pi \circ exp|_{\mathfrak{p}}) \colon \mathfrak{p} \to T_{[\mathbb{1}]}G/H$$

ein Isomorphismus.

Beweis: Wir beweisen zuerst die Hausdorff-Eigenschaft. Sei $xH \neq yH \in G/H$. Wir müssen beweisen, dass die Nebenklassen xH und yH in G/H disjunkte offene Umgebungen haben. Zunächst gibt es wegen der Abgeschlossenheit von H eine offene Umgebung U von $\mathbb{1}$, so dass yH nicht in UxH enthalten ist. Wegen der Stetigkeit der Multiplikation gibt es eine offene Umgebung V von $\mathbb{1}$ mit

$$V^2 \subset U,$$

o.B.d.A. können wir $V = V^{-1}$ annehmen. Dann sind VxH und VyH die gewünschten disjunkten Umgebungen, denn andernfalls gäbe es $v, w \in V$ mit

$$vxH = wyH$$

im Widerspruch zu

$$yH \notin UxH.$$

Wir beweisen nun, dass G/H eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. Wir wählen ein Komplement $\mathfrak{p}$ zu $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$, also eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}.$$

Für die durch

$$\mu(p, h) = exp(p)exp(h)$$

definierte Abbildung

$$\mu \colon \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h} \to G$$

gilt $D_{(0,0)}\mu = id$, also ist μ ein lokaler Diffeomorphismus um $(0, 0)$. ist Sei $U \subset \mathfrak{g}$ eine Umgebung von $(0, 0)$ so dass μ ein Diffeomorphismus von U auf $\mu(U) \subset G$ ist.

Weil H nach Satz 1 eine Untermannigfaltigkeit ist, können wir U so wählen, dass

$$H \cap exp(U) = exp(U \cap \mathfrak{h}).$$

Wegen Stetigkeit der Multiplikation gibt es eine kleinere Umgebung V mit

$$exp(u_1)^{-1}exp(u_2) \in exp(U)$$

für alle $u_1, u_2 \in V$. Aus diesen beiden Eigenschaften folgt, dass die Verknüpfung der Projektion $G \to G/H$ mit $exp|_{\mathfrak{p} \cap V} \colon \mathfrak{p} \cap V \to G$ injektiv ist. Tatsächlich folgt für $u_1, u_2 \in \mathfrak{p} \cap V$ aus

$$exp(u_1)H = exp(u_2)H,$$

dass es ein $h \in H$ mit

$$h = exp(u_1)^{-1}exp(u_2) \in H \cap exp(U) = exp(\mathfrak{h} \cap U)$$

gäbe, woraus wiederum $h = exp(u)$ folgt für ein $u \in \mathfrak{h} \cap U$. Damit ist aber

$$\mu(u, u_1) = \mu(0, u_2)$$

und aus der Injektivität von $\mu|_U$ folgt $u_1 = u_2$.

Damit ist die stetige und offene Abbildung

$$\mathfrak{p} \cap V \to G/H$$

ein Homöomorphismus auf ihr Bild. Wir können nun einen Atlas $\left\{(U_{[g]}, \phi_{[g]}) \colon\ [g] \in G/H\right\}$ definieren durch

$$U_{[g]} = \{[g \cdot exp(v)] : v \in \mathfrak{p} \cap V\}$$

und

$$\phi_g = (exp|_V)^{-1} \circ l_g^{-1} \colon U_{[g]} \to \mathfrak{p} \cap V \subset \mathfrak{p} \cong \mathbb{R}^{dim(G)-dim(H)}.$$

Die Kartenwechsel sind die Einschränkungen der Kartenwechsel aus der Definition der Mannigfaltigkeitsstruktur von G auf

$$\mathbb{R}^{dim(G)-dim(H)} \cong \mathfrak{p} \subset \mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^{dim(G)}$$

und mithin differenzierbar. *QED*

Beispiel 49

$$T_{[\mathbb{1}]} SL(n,\mathbb{R})/SO(n) \cong \left\{ A \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) \colon A = A^T \right\}$$

Jede Matrix X lässt sich eindeutig als Summe einer schiefsymmetrischen und einer symmetrischen Matrix zerlegen:

$$X = \frac{X - X^T}{2} + \frac{X + X^T}{2}.$$

Falls die Spur von X verschwindet, gilt dies auch für die beiden Summanden. Also ist

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{p}$$

mit

$$\mathfrak{p} = \left\{ A \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) \colon A = A^T \right\}.$$

5.2. **Differenzierbare Gruppenwirkungen.**

Definition 46. *Eine differenzierbare Wirkung einer Lie-Gruppe G auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist eine differenzierbare Abbildung*

$$\mu \colon G \times M \to M$$

mit

$$\mu(\mathbb{1}, x) = x \quad \forall x \in M$$

und

$$\mu(g, \mu(h,x)) = \mu(gh,x)) \quad \forall g,h \in G, x \in M.$$

Man schreibt auch abkürzend gx für $\mu(g,x)$.

Satz 13. *Sei μ eine differenzierbare, transitive Wirkung einer Lie-Gruppe G auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M.*

Dann ist M diffeomorph zu G/H mit

$$H = Stab(x_0) := \{ g \in G \colon \mu(g, x_0) = x_0 \}.$$

Beweis: Weil die Wirkung transitiv ist, definiert

$$f([g]) = \mu(g, x_0)$$

eine G-äquivariante Bijektion

$$f \colon G/H \to M.$$

Die stetige Bijektion f ist jedenfalls ein lokaler Homöomorphismus, woraus mit Brouwer's Satz von der Invarianz der Dimension

$$dim(G/H) = dim(M)$$

folgt. Wir werden zeigen, dass f und f^{-1} differenzierbar sind.

Differenzierbarkeit von f ist äquivalent zur Differenzierbarkeit von $f \circ \phi_{[g]}^{-1}$ für alle im Beweis von Satz 12 definierten Karten $\phi_{[g]}$. Diese folgt aber aus

$$f \circ \phi_{[g]}^{-1} = \mu|_{G \times \{x_0\}} \circ exp_g|_{\mathfrak{p}} \colon \mathfrak{p} \to M.$$

Aus dem Lemma von Sard folgt, dass $D_x f$ in mindestens einem $x \in G/H$ surjektiv sein muss. Wegen der Äquivarianz von f ist $D_x f$ dann aber in jedem $x \in G/H$ surjektiv und mithin wegen

$$dim(T_x G/H) = dim(T_{f(x)} M)$$

ein Isomorphismus. Also ist f ein lokaler Diffeomorphismus. Insbesondere ist die Umkehrabbildung f^{-1} differenzierbar. *QED*

Beispiel 50

$$S^n = SO(n+1)/SO(n) = O(n+1)/O(n)$$

Durch $\mu(A,x) = Ax$ wird eine differenzierbare Wirkung von $O(n+1)$ auf $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ definiert. Der Stabilisator von

$$x_0 = (0, \ldots, 0, 1)$$

ist

$$O(n) \times \{1\} \subset O(n+1).$$

Weil $F(A) = \mu(A, x_0)$ eine surjektive Abbildung ist, kann man Satz 13 anwenden.

Beispiel 51

$$\mathbb{H}^n = SO(1,n)_0/SO(n) = O(1,n)_0/O(n)$$

Durch $\mu(A,x) = Ax$ wird eine differenzierbare Wirkung von $O(1,n)_0$ auf $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ definiert. Der Stabilisator von

$$x_0 = (1, 0, \ldots, 0)$$

ist

$$\{1\} \times O(n) \subset O(1,n).$$

Weil $F(A) = \mu(A, x_0)$ eine surjektive Abbildung ist, kann man Satz 13 anwenden.

5.3. **Riemannsche Homogene Räume.**

Definition 47. *Ein Riemannscher homogener Raum ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit M, deren Isometrie-Gruppe $Isom(M)$ transitiv auf M wirkt, d.h., zu je zwei Punkten $x, y \in M$ gibt es eine Isometrie $g \in Isom(M)$ mit $g(x) = y$.*

Lemma 46. *Jeder Riemannsche homogene Raum ist von der Form G/H für eine Lie-Gruppe G und eine kompakte Untergruppe $H \subset G$.*

Beweis: Nach Satz 11 ist $G := Isom(M)$ eine Lie-Gruppe. Die Wirkung von G auf M ist differenzierbar.

Wähle ein beliebiges $x_0 \in M$, dann ist

$$H = Stab(x_0) = \{g \in G \colon g x_0 = x_0\}$$

eine abgeschlossene Untergruppe, denn aus $g = \lim_{n \to \infty} g_n$ und $g_n x_0 = x_0$ für alle n folgt $g x_0 = x_0$.

Die Riemannsche Metrik definiert ein Skalarprodukt auf $T_{x_0} M$, welches von H erhalten wird. H ist also isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von $O(n)$ für $n = dim(M)$ und mithin kompakt.

Mit Satz 13 bekommen wir einen Diffeomorphismus $G/H \to M$. *QED*

6. Symmetrische Räume

6.1. Definition und Beispiele.

Definition 48. *Eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit M heißt ein symmetrischer Raum, wenn es zu jedem $x \in M$ eine Spiegelung an x gibt, d.h. eine Isometrie*

$$S_x \colon M \to M$$

mit

$$S_x(x) = x$$

und

$$D_x S_x = -\mathrm{Id}.$$

Lemma 47. *Für die Symmetrien S_x eines symmetrischen Raumes M und jede Geodäte γ in M mit $\gamma(0) = x$ gilt*

$$S_x(\gamma(t)) = \gamma(-t).$$

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus den definierenden Eigenschaften von S_x. *QED*

Korollar 12. *Für die Symmetrien S_x eines symmetrischen Raumes M und jede Geodäte γ in M gilt*

$$S_{\gamma(s)}(\gamma(s+t)) = \gamma(s-t),$$

wenn $s+t$ im Definitionsbereich von γ liegt.

Beweis: Dies folgt durch Anwendung von Lemma 47 auf die Geodäte

$$\eta(t) := \gamma(s+t).$$

QED

Beispiel 52 *Der euklidische $\mathbb{R}^n$ ist ein symmetrischer Raum.*

Zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ definiert man die Spiegelung $S_x \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$S_x(y) = 2x - y.$$

Beispiel 53 *Die Einheitssphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist ein symmetrischer Raum.*

Zu $x, y \in S^n$ definiert man $S_x(y) \in S^n$ als den eindeutig bestimmten Punkt auf dem Großkreis durch x und y, für den

$$d(S_x(y), x) = d(y, x)$$

sowie (falls x und y keine antipodalen Punkte sind) $S_x(y) \neq y$ gilt.

Eine explizite Formel ist

$$S_x(y) = -y + 2\langle y, x\rangle x$$

mit dem euklidischen Skalarprodukt $\langle x, y\rangle$.

Beispiel 54 *Der hyperbolische Raum $\mathbb{H}^n$ ist ein symmetrischer Raum.*

Eine explizite Formel für die Symmetrie S_x des Hyperboloid-Modells ist

$$S_x(y) = -y + 2\langle x, y\rangle_{Lor} x$$

für die Lorentz-Metrik $\langle x, y\rangle_{Lor}$.

Beispiel 55 *Eine Lie-Gruppe mit bi-invarianter Metrik ist ein symmetrischer Raum.*

Die Symmetrie S_g an g ist gegeben durch

$$S_g(h) = gh^{-1}g.$$

Offensichtlich ist $S_g(g) = g$.

Wegen $S_{\mathbb{1}}(h) = h^{-1}$ ist $D_{\mathbb{1}}S_{\mathbb{1}} = -Id$ und insbesondere ist $S_{\mathbb{1}}$ eine Isometrie auf $T_{\mathbb{1}}G$.

Wegen Bi-Invarianz der Metrik und

$$D_hS_{\mathbb{1}} = D_{h^{-1}}l_g \circ D_{\mathbb{1}}S_{\mathbb{1}} \circ D_hr_g$$

ist $S_{\mathbb{1}}$ dann auch eine Isometrie von T_hG auf $T_{h^{-1}}G$.

Für $g \in G$ folgt aus

$$S_g = r_g \circ l_g \circ S_{\mathbb{1}}$$

mit der Kettenregel

$$D_hS_g = D_{gh^{-1}}r_g \circ D_{h^{-1}}l_g \circ D_hS_{\mathbb{1}}$$

und somit ist wegen der Bi-Invarianz der Metrik auch S_g eine Isometrie von jedem Tangentialraum T_hG auf $T_{S_g(h)}G$.

Schließlich folgt $D_gS_g = -Id$ aus

$$S_g(g \cdot exp(tX)) = g \cdot exp(-tX).$$

6.2. Eigenschaften symmetrischer Räume.

Lemma 48. *Jeder symmetrische Raum ist geodätisch vollständig.*

Beweis: Sei

$$\gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$$

eine auf einem Intervall $(-\epsilon, \epsilon)$ definierte Geodäte. Die Symmetrie an $\gamma(\pm\frac{\epsilon}{2})$ bildet wegen Lemma 47 $\gamma(-\epsilon, \epsilon)$ auf $\gamma(0, 2\epsilon)$ bzw. $\gamma(-2\epsilon, 0)$ ab, insbesondere läßt sich die Geodäte auf das Intervall $(-2\epsilon, 2\epsilon)$ fortsetzen. Durch Iteration dieses Arguments erhält man, dass γ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. *QED*

Korollar 13. *Die Symmetrien S_x eines symmetrischen Raumes sind eindeutig bestimmt.*

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus Lemma 44. *QED*

Korollar 14. *Für die Symmetrien S_x eines symmetrischen Raumes gilt $S_x^2 = Id$.*

Beweis: Das folgt aus Lemma 44 wegen $S_x^2(x) = x$ und $D_x(S_x^2) = Id$. *QED*

Lemma 49. *Jeder symmetrische Raum M ist ein Riemannscher homogener Raum*

$$M = G/K$$

mit $G = Isom(M)$ und einer kompakten Untergruppe $K \subset G$.

Beweis: Sei M ein symmetrischer Raum und $p, q \in M$. Wegen Lemma 48 und dem Satz von Hopf-Rinow (Satz 20) gibt es eine Geodäte $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$ mit

$$\gamma(0) = p, \gamma(t) = q$$

für ein $t \in \mathbb{R}$.

Die Symmetrie $S_{\gamma(\frac{t}{2})}$ ist eine Isometrie und bildet p auf q ab.

Also wirkt $G = Isom(M)$ transitiv auf M und mit Satz 13 erhalten wir $M = G/K$ für die kompakte Untergruppe $K = Stab(p)$.

QED

Lemma 50. *In einem symmetrischen Raum M sind die Symmetrien an verschiedenen Punkten konjugiert in $Isom(M)$.*

Beweis: Zu $p, q \in M$ gibt es nach Lemma 49 eine Isometrie $g \in Isom(M)$ mit $g(p) = q$. Dann ist gS_pg^{-1} eine Symmetrie an q und wegen Lemma 13 muss

$$S_q = gS_pg^{-1}$$

sein. QED

Lemma 51. *Sei M ein symmetrischer Raum und $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$ eine Geodäte. Dann gibt es eine 1-Parameter-Familie von Transvektionen an γ, d.h., zu jedem $t \in \mathbb{R}$ eine Isometrie*

$$\tau_t\colon M \to M$$

mit

$$\tau_t(\gamma(s)) = \gamma(s+t)$$

für alle $s \in \mathbb{R}$.

Beweis: Definere τ_t durch

$$\tau_t = S_{\gamma(t)}S_{\gamma(\frac{t}{2})}.$$

Aus Korollar 12 folgt die Behauptung. QED

Lemma 52. *Für die in Lemma 51 definierten Transvektionen τ_t entlang einer Geodäten γ ist für jedes $X \in T_{\gamma(0)}M$ das entlang γ definierte Vektorfeld*

$$D_{\gamma(0)}\tau_t(X)$$

parallel entlang γ.

Beweis: Eine Symmetrie $S_{\gamma(t)}$ ist eine Isometrie und bildet insbesondere Geodäten in Geodäten und parallele Vektorfelder in parallele Vektorfelder ab. Wenn X ein paralleles Vektorfeld ist, dann auch $-X$. Aus

$$D_{\gamma(t)}S_{\gamma(t)}X(\gamma(t)) = -X(\gamma(t))$$

folgt also

$$D_{\gamma(s)}S_{\gamma(t)}X(\gamma(s)) = -X(\gamma(-s))$$

für jedes parallele Vektorfeld X und alle $s \in \mathbb{R}$.

Weil eine Transvektion entlang γ die Hintereinanderausführung zweier solcher Symmetrien ist, erhält sie parallele Vektorfelder entlang γ. QED

6.3. **Cartan-Zerlegung.**

Lemma 53. *Sei M ein symmetrischer Raum, G seine Isometrie-Gruppe, $K = Stab(x_0) \subset G$ für ein $x_0 \in M$. Seien $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{k}$ die Lie-Algebren von G und K, und sei*

$$\mathfrak{p} = \left\{ \frac{d}{dt}|_{t=0}\tau_t\colon \tau_t \text{ 1-Parameter-Familie von Transvektionen entlang Geodäte } \gamma\colon \mathbb{R} \to M \text{ mit } \gamma(0) = x_0 \right\}$$

die Menge $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g} = T_{\mathbb{1}}G$ derjenigen Tangentialvektoren, für die der Fluss des zugehörigen links-invarianten Vektorfeldes in $G = Isom(M)$ aus Transvektionen entlang einer Geodäten $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$ mit $\gamma(0) = x_0$ besteht. Dann ist

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}.$$

Beweis: Wenn der Fluss eines linksinvarianten Vektorfeldes aus Transvektionen besteht, dann läßt er insbesondere nicht x_0 fest. Also ist

$$\mathfrak{k} \cap \mathfrak{p} = 0.$$

Weiter gibt es zu jedem $v \in T_{x_0}M$ eine 1-Parameter-Familie von Transvektionen entlang der durch $\gamma(0) = x_0, \gamma'(0) = v$ bestimmten Geodäte γ. Also ist

$$dim(\mathfrak{p}) \geq dim(T_{x_0}M) = dim(M) = dim(\mathfrak{g}) - dim(\mathfrak{k}).$$

Daraus folgt aber, dass $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{p}$ bereits ganz $\mathfrak{g}$ aufspannen müssen und insbesondere $\mathfrak{p}$ zu $T_{x_0}M$ isomorph ist. *QED*

Definition 49. *Zu einem symmetrischen Raum M und $x_0 \in M$ heisst die durch Lemma 53 gegebene Zerlegung*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

der Lie-Algebra der Isometrie-Gruppe von M die Cartan-Zerlegung von $\mathfrak{g}$ zum symmetrischen Raum M.

Lemma 54. *Zu einem symmetrischen Raum G/K gibt es einen Lie-Gruppen-Homomorphismus*

$$\sigma\colon G \to G$$

mit

$$\sigma^2 = \mathrm{Id},$$

so dass $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{p}$ die Eigenräume von $D_{\mathbb{1}}\sigma$ zu den Eigenwerten 1 und -1 sind.

Beweis: Definiere σ durch

$$\sigma(g) = S_{[\mathbb{1}]} \circ g \circ S_{[\mathbb{1}]},$$

wobei $S_{[\mathbb{1}]}$ als Element von $G = Isom(M)$ aufzufassen ist. Man prüft leicht nach, dass σ ein Homomorphismus ist. Wegen $S_{[\mathbb{1}]}^2 = \mathrm{Id}$ ist $\sigma^2(g) = g$ für alle $g \in G$. Insbesondere ist $D_{\mathbb{1}}\sigma^2 = \mathrm{Id}$ und $D_{\mathbb{1}}\sigma$ kann nur die Eigenwerte ± 1 haben.

Wegen

$$\sigma(\tau_t) = \tau_{-t}$$

für alle Transvektionen τ_t ist

$$D_{\mathbb{1}}\sigma|_{\mathfrak{p}} = -\mathrm{Id}.$$

Wegen $K \subset O(T_{[\mathbb{1}]}(G/K))$ und $-\mathbb{1} \in Z(O(n))$ ist $\sigma|_K = Id$ und insbesondere

$$D_{\mathbb{1}}\sigma|_{\mathfrak{k}} = \mathrm{Id}.$$

QED

Definition 50. *Ein Lie-Gruppen-Homomorphismus mit den in Lemma 54 genannten Eigenschaften heisst Cartan-Involution.*

Korollar 15. *Für die Cartan-Zerlegung eines symmetrischen Raumes gilt*

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{k}, [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}, [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}.$$

Beweis: Weil σ ein Homomorphismus von Lie-Gruppen ist, ist $D_{\mathbb{1}}\sigma$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus.

Damit gilt: wenn x ein Eigenvektor zum Eigenwert λ und y ein Eigenvektor zum Eigenwert μ ist, dann ist $[x, y]$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda\mu$. Die Behauptung folgt damit aus Lemma 54. *QED*

Beispiel 56 *Cartan-Zerlegung $\mathfrak{o}(n+1) = \mathfrak{o}(n) \oplus \mathfrak{p}$.*
Zu der Sphäre
$$S^n = O(n+1)/O(n)$$
aus Beispiel 53 erhält man die Cartan-Zerlegung
$$\mathfrak{o}(n+1) = \mathfrak{o}(n) \oplus \mathfrak{p}$$
mit
$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ \ldots & O & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & a_n \\ -a_1 & \ldots & -a_n & 0 \end{pmatrix} : a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lemma 55. *Sei $M = G/K$ ein symmetrischer Raum und $x_0 = [\mathbb{1}] \in M$. Für $G = Isom(M)$ sei $m \colon G \to M$ die durch*
$$m(g) = g \cdot x_0$$
definierte Abbildung.

Sei
$$exp \colon \mathfrak{g} \to G$$
die Exponentialabbildung der Lie-Gruppe G und
$$exp_{x_0} \colon T_{x_0}M \to M$$
die Riemannsche Exponentialabbildung aus Lemma 83. Dann ist
$$D_{\mathbb{1}}m|_{\mathfrak{p}} \colon \mathfrak{p} \to T_{x_0}M$$
ein Isomorphismus und für alle $X \in \mathfrak{p}$ gilt
$$exp_{x_0}(D_{\mathbb{1}}m(X)) = exp(X) \cdot x_0.$$

Beweis: Für eine Geodäte γ durch $x_0 = [\mathbb{1}] \in G/K$ sind die Transvektionen τ_t an γ eine 1-Parameter-Gruppe in $G = Isom(M)$. Nach Lemma 17 gibt es ein $X \in \mathfrak{g}$ mit
$$exp(tX) = \tau_t$$
für alle t. Wegen
$$exp(-tX) = \tau_{-t} = S_{[\mathbb{1}]} \circ \tau_t \circ S_{[\mathbb{1}]} = \sigma(exp(tX)) = exp(tD_{\mathbb{1}}\sigma(X))$$
ist
$$D_{\mathbb{1}}\sigma(X) = -X$$
und damit
$$X \in \mathfrak{p}$$
nach Lemma 54.

Sei $v = \gamma'(0)$, dann ist
$$\begin{aligned} v &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\tau_t(x_0) = \frac{d}{dt}|_{t=0}exp(tX)(x_0) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}m(exp(tX)) = D_{\mathbb{1}}m(X). \end{aligned}$$
Damit ist $D_{\mathbb{1}}m$ eine surjektive lineare Abbildung von $\mathfrak{p}$ nach $T_{x_0}M$ und wegen $dim(\mathfrak{p}) = dim(T_{x_0}M)$ also ein Isomorphismus.

Damit ist

$$exp_{x_0}(D_{\mathbb{1}}m(X)) = exp_{x_0}(v) = \tau_1(x_0) = exp(X) \cdot x_0.$$

QED

Korollar 16. *Für eine Lie-Gruppe G mit einer bi-invarianten Metrik stimmt die Exponentialabbildung der Lie-Gruppe mit der Riemannschen Exponentialabbildung überein.*

Beweis: Das folgt aus Beispiel 55 und Lemma 55. *QED*

6.4. **Krümmung symmetrischer Räume.**

Lemma 56. *Für einen symmetrischen Raum $M = G/K$ mit einer Cartan-Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, ein Vektorfeld $V \in \mathfrak{p}$ und ein beliebiges Vektorfeld U auf M gilt*

$$(\nabla_U V)_{x_0} = 0.$$

Beweis: Nach Definition von $\mathfrak{p}$ ist

$$V(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\tau_t(x)$$

für die Transvektionen τ_t entlang der Geodäten γ_V mit $\gamma_V(0) = x_0, \gamma_V'(0) = V$.

Weiterhin sei γ_U die Geodäte mit $\gamma_U(0) = x_0, \gamma_U'(0) = U$. Dann ist

$$\begin{aligned}(\nabla_U V)_{x_0} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial t}\tau_t(\gamma_U(s))|_{s=t=0} \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial s}\tau_t(\gamma_U(s))|_{s=t=0} \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}((D_{x_0}\tau_t)U),\end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichung aus $\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial t} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial s} = \left[\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\right] = 0$ folgt.

Weil $D_{x_0}\tau_t(U)$ wegen Lemma 52 parallel entlang γ_V ist, folgt

$$(\nabla_U V)_{x_0} = 0.$$

QED

Lemma 57. *Für ein Killingfeld X auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M gilt*

$$R(A, X)B = \nabla_{\nabla_A B}X - \nabla_A \nabla_B X$$

für alle Vektorfelder A, B.

Beweis: Wir wollen zeigen, dass

$$L(A, B) := R(X, A)B - \nabla_{\nabla_A B}X + \nabla_A \nabla_B X$$

verschwindet. Dafür genügt es zu zeigen, dass L symmetrisch und antisymmetrisch ist.

Die Antisymmetrie folgt aus der Jacobi-Gleichung. Sei nämlich ϕ_t der Fluss des Killingfeldes X, dann ist jedes ϕ_t eine Isometrie und für eine Geodäte γ ist dann

$$\gamma_s := \phi_s(\gamma)$$

eine 1-Parameter-Familie von Geodäten. Aus der Jacobi-Gleichung (Abschnitt 7.4.4)

$$\nabla_A \nabla_A Y - \nabla_{\nabla_A A}X + R(X, A)A = 0$$

ergibt sich unmittelbar $L(A, A) = 0$, also die Antisymmetrie von L und insbesondere $L(A, B) = -L(B, A)$.

Die Symmetrie folgt aus den Symmetrien des Riemannschen Krümmungstensors und der Torsionsfreiheit des Levi-Civita-Zusammenhangs. Letztere besagt

$$\nabla_A B - \nabla_B A = [A, B]\,,$$

woraus zunächst

$$\begin{aligned} L(A,B) - L(B,A) &= R(X,A)B + R(X,B)A - \nabla_A\nabla_B X - \nabla_B\nabla_A X - \nabla_{[A,B]}X \\ &= R(X,A)B - R(X,B)A - R(A,B)X \\ &= R(X,A)B + R(B,X)A + R(A,B)X \end{aligned}$$

folgt, was aber wegen der Bianchi-Identität (Lemma 84) verschwindet. Also ist $L(A,B) = L(B,A)$.

QED

Satz 14. *Sei M ein symmetrischer Raum mit Cartan-Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, $p \in M$ und $V, W, U \in \mathfrak{p} \cong T_pM$. Dann gilt für den Riemannschen Krümmungstensor in p*

$$(R(V,W)U)_p = [U, [V,W]]_p\,.$$

Beweis: Wir haben zunächst

$$\begin{aligned} R(V,W)U &= -R(U,V)W - R(W,U)V \\ &= -R(U,V)W + R(U,W)V \\ &= \nabla_U\nabla_V W - \nabla_{\nabla_U V}W - \nabla_U\nabla_W V + \nabla_{\nabla_U W}V. \end{aligned}$$

Dabei folgt die erste Gleichung aus der Bianchi-Identität, die zweite Gleichung aus der Antisymmetrie des Krümmungstensors und die dritte Gleichung aus Lemma 57. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} R((V,W)U)_p &= (\nabla_U\nabla_V W - \nabla_U\nabla_W V)_p \\ &= \nabla_U\,[V,W]_p \\ &= [U,[V,W]]_p\,, \end{aligned}$$

wobei die erste Gleichung aus Lemma 56, die zweite Gleichung aus der Torsionsfreiheit des Levi-Civita-Zusammenhangs und die dritte Gleichung aus

$$(\nabla_{[V,W]}U)_p = 0$$

(wegen Lemma 56) sowie (wieder wegen der Torsionsfreiheit)

$$\nabla_U\,[V,W] - \nabla_{[V,W]}U = [U,[V,W]]$$

folgt. *QED*

Definition 51. *Ein symmetrischer Raum $M = G/K$ mit $G = Isom(M)$ und $K = Stab(x_0) \subset G$ heißt isotropie-irreduzibel, wenn die Darstellung von K auf $T_{x_0}M$ irreduzibel ist.*

Satz 15. (Satz von de Rham) *Ein einfach zusammenhängender, symmetrischer Raum, der kein nichttriviales Produkt zweier Riemannscher Mannigfaltigkeiten ist, ist isotropie-irreduzibel.*

Beweis: Ein Beweis findet sich in *G. de Rham: Sur la reductibilitè d'un espace de Riemann. Comment. Math. Helv. 26, S. 328-344 (1952).* Wir führen den allgemeinen Beweis hier nicht aus, sondern erwähnen nur, dass für die uns interessierenden Beispiele aus Abschnitt 6.1 die Isotropie-Irreduzibilität direkt überprüft werden kann. *QED*

Lemma 58. *Für einen isotropie-irreduziblen symmetrischen Raum M gibt es eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass*

$$\lambda g = B \text{ auf } \mathfrak{p} = T_{x_0}M$$

für die Riemannsche Metrik g und die Killingform B gilt.

Beweis: Die Riemannsche Metrik g_{x_0} ist positiv definit und insbesondere nicht-ausgeartet auf $T_{x_0}M$, es gibt also zu jedem $u \in T_{x_0}M$ ein $Lu \in T_{x_0}M$ mit

$$B(u,v) = g(Lu, v)$$

für alle $v \in T_{x_0}M$. Die so definierte Abbildung

$$L\colon T_{x_0}M \to T_{x_0}M$$

ist linear und man prüft leicht nach, dass

$$L(h \cdot u) = h \cdot L(u)$$

für alle $h \in G = Isom(M)$ und

$$g(Lu, v) = g(u, Lv)$$

für alle $u, v \in T_{x_0}M$ gilt. Aus der letzteren Bedingung folgt, dass alle Eigenwerte von L reell sind, und aus der vorherigen Bedingung folgt, dass die Eigenräume K-invariant sind für $K = Stab(x_0)$. Wegen der Irreduzibilität der Wirkung von K auf $T_{x_0}M$ müssen die Eigenräume aber ganz $T_{x_0}M$ sein, woraus $L = \lambda Id$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ folgt. Damit ist aber

$$B(u,v) = \lambda g(u,v)$$

für alle $u, v \in T_{x_0}M$. *QED*

Korollar 17. *Für einen isotropie-irreduziblen symmetrischen Raum M und die Konstante λ aus Lemma 58 gilt für die Schnittkrümmung der von zwei orthonormalen Vektoren $X, Y \in T_{x_0}M = \mathfrak{p}$ aufgespannten Ebene*

$$K(X,Y) = \frac{1}{\lambda} B([X,Y], [X,Y])$$

falls $\lambda \neq 0$ und $K(X,Y) \equiv 0$ falls $\lambda = 0$.

Beweis: Aus Satz 14 folgt

$$(R(X,Y)Y)_{x_0} = [Y,[X,Y]]_{x_0},$$

mithin

$$\lambda K(X,Y) = \lambda g(R(X,Y)Y, X) = B(R(X;Y)Y, X) = B([Y,[X,Y]], X)$$

$$= -B([[X,Y], Y], X) = B([X,Y], [X,Y]),$$

wobei wir für die letzte Gleichung benutzt haben, dass wegen Teil c) von Lemma 37 die adjungierte Abbildung $ad(Y)(.) = [., Y]$ schief-symmetrisch für die Killingform B ist.

Für $\lambda \neq 0$ folgt die Behauptung.

Für $\lambda = 0$ folgt aus der Nicht-Ausgeartetheit der Killingform $[X,Y] = 0$ und damit $R \equiv 0$ nach Satz 14. *QED*

6.5. **Typen symmetrischer Räume.**

Definition 52. *Ein symmetrischer Raum ist von kompaktem Typ, wenn $\mathfrak{g}$ halbeinfach und die Killingform auf $\mathfrak{g}$ negativ definit ist.*

Ein symmetrischer Raum ist von euklidischem Typ, wenn $\mathfrak{p}$ abelsch ist, also $[X,Y]=0$ für alle $X,Y\in\mathfrak{p}$ gilt.

Ein symmetrischer Raum ist von nichtkompaktem Typ, wenn $\mathfrak{g}$ halbeinfach und die Einschränkung der Killingform auf $\mathfrak{p}$ positiv definit ist.

Satz 16. *Für einen isotropie-irreduziblen symmetrischen Raum M und $X,Y\in T_{x_0}M, x_0\in M$ gilt:*

$$K(X,Y)\geq 0,$$

wenn M ein symmetrischer Raum von kompaktem Typ ist,

$$K(X,Y)=0,$$

wenn M ein symmetrischer Raum von euklidischem Typ ist,

$$K(X,Y)\leq 0,$$

wenn M ein symmetrischer Raum von nichtkompaktem Typ ist.

Beweis:

Für symmetrische Räume von euklidischem Typ folgt die Behauptung unmittelbar aus Korollar 17 und Definition 52.

Für symmetrische Räume von kompaktem Typ ist die Killingform negativ definit, womit die Konstante λ aus Lemma 58 negativ sein muß. Aus $\lambda<0$ und

$$B([X,Y],[X,Y])\leq 0$$

folgt $K(X,Y)\geq 0$ mit Gleichheit nur für $[X,Y]=0$.

Wenn $M=G/K$ ein symmetrischer Raum von nicht-kompaktem Typ ist, dann ist die Einschränkung der Killing-Form auf $\mathfrak{p}$ positiv definit, womit die Konstante λ aus Lemma 58 positiv sein muß.

Weiterhin ist die Einschränkung der Killingform auf $\mathfrak{k}$ negativ definit wegen Lemma 8. Aus $X,Y\in\mathfrak{p}$ folgt $[X,Y]\in\mathfrak{k}$ wegen Korollar 15, also

$$B([X,Y],[X,Y])\leq 0$$

und $K(X,Y)\leq 0$ mit Gleichheit nur für $[X,Y]=0$. *QED*

6.6. **Der symmetrische Raum SL(n,R)/SO(n).**

6.6.1. *Der Raum der positiv definiten, symmetrischen Matrizen.*

Definition 53. *Wir bezeichnen mit*

$$P(n,\mathbb{R})\subset Mat(n,\mathbb{R})$$

die Teilmenge der positiv definiten, symmetrischen Matrizen.

Lemma 59. *$P(n,\mathbb{R})$ ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension* $\begin{pmatrix} n+1\\ 2\end{pmatrix}$.

Beweis: Die Menge $S(n,\mathbb{R})$ der symmetrischen $n\times n$-Matrizen ist vermittels der Abbildung

$$A\to(a_{ij})_{i\leq j}$$

zu $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ diffeomorph.

$P(n,\mathbb{R})$ ist eine offene Teilmenge von $S(n,\mathbb{R})$, weil sie durch endlich viele Ungleichungen - die Positivität der führenden Hauptminoren - gegeben ist.

QED

Lemma 60. *Durch*
$$g \cdot A := gAg^T$$
wird eine transitive Wirkung von $GL(n,\mathbb{R})$ auf $P(n,\mathbb{R})$ definiert.

Beweis: Transitivität ist ein Spezialfall der Polarzerlegung (Lemma 76): Sei $p \in P(n,\mathbb{R})$ eine symmetrische, positiv definite Matrix, dann ist p von der Form $p = BDB^{-1}$ mit $B \in O(n)$ und einer Diagonalmatrix D, deren Einträge wegen der positiven Definitheit positiv sind und aus der man also die Quadratwurzel ziehen kann. Setze
$$g = p^{\frac{1}{2}} := B\sqrt{D}B^{-1},$$
dann ist $g = g^T$ und damit
$$P = g \cdot \mathbb{1}.$$
QED

Korollar 18. *$P(n,\mathbb{R})$ ist diffeomorph zu*
$$GL(n,\mathbb{R})/O(n).$$
Unter diesem Diffeomorphismus entspricht die positiv definite, symmetrische Matrix $p \in P(n,\mathbb{R})$ der Äquivalenzklasse
$$[g] \in GL(n,\mathbb{R})/O(n)$$
des Elements
$$g = p^{\frac{1}{2}} \in GL(n,\mathbb{R}).$$

Beweis: Das folgt mit Satz 13 wegen
$$Stab(\mathbb{1}) = O(n)$$
aus Lemma 60. *QED*

Lemma 61. *Der Tangentialraum $T_pP(n,\mathbb{R})$ in einem Punkt p kann mit der Menge $S(n,\mathbb{R})$ der symmetrischen $n \times n$-Matrizen identifiziert werden.*
Durch
$$g_p(X,Y) = Spur(p^{-\frac{1}{2}}Xp^{-1}Yp^{-\frac{1}{2}})$$
für $p \in P(n,\mathbb{R}), X, Y \in S(n,\mathbb{R})$ wird eine Riemannsche Metrik auf $P(n,\mathbb{R})$ definiert.

Beweis: Die erste Behauptung ergibt sich, weil $P(n,\mathbb{R})$ eine offene Teilmenge von $S(n,\mathbb{R})$ ist. Explizit können wir $X \in S(n,\mathbb{R})$ mit dem Tangentialvektor an die durch
$$\mathbb{R} \to P(n,\mathbb{R})$$
$$t \to p + tX$$
oder auch die durch
$$p^{\frac{1}{2}}exp(tX)p^{\frac{1}{2}}$$
gegebenen Kurve durch p identifizieren.

Aus den entsprechenden Eigenschaften der Spur folgt, dass $g_{\mathbb{1}}$ symmetrisch und bilinear ist. Eine symmetrische Matrix X hat reelle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, woraus
$$g_{\mathbb{1}}(X,X) = Spur(X^2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \geq 0$$
mit Gleichheit nur für $X = 0$ folgt.

$g_{\mathbb{1}}$ ist invariant unter der Wirkung von $O(n) \subset GL(n,\mathbb{R})$. Die Wirkung von $g = p^{\frac{1}{2}} \in GL(n,\mathbb{R})$ hat das Differential

$$X \to p^{\frac{1}{2}} X p^{\frac{1}{2}},$$

g_p ist also nach Konstruktion invariant unter der Wirkung von $GL(n,\mathbb{R})$ und insbesondere für alle p ein Skalarprodukt. *QED*

Lemma 62. *$P(n,\mathbb{R})$ ist ein symmetrischer Raum.*

Beweis: Für $A, B \in P(n,\mathbb{R})$ definieren wir

$$S_B(A) = BA^{-1}B.$$

Insbesondere ist $S_{\mathbb{1}}(A) = A^{-1}$, woraus $S_{\mathbb{1}} = \mathbb{1}$ und $D_{\mathbb{1}} S_{\mathbb{1}} = -Id$ folgt. $S_{\mathbb{1}}$ ist eine Isometrie, denn aus

$$S_{\mathbb{1}}(p^{\frac{1}{2}} exp(tX) p^{\frac{1}{2}}) = p^{-\frac{1}{2}} exp(-tX) p^{-\frac{1}{2}}$$

folgt $D_p S_{\mathbb{1}}(X) = -X$ und insbesondere

$$Spur(D_p S_{\mathbb{1}}(X), D_p S_{\mathbb{1}}(Y)) = Spur(XY).$$

Für $g \in GL(n,\mathbb{R})$ ist dann auch

$$S_{gg^T} := l_g S_{\mathbb{1}} l_{g^{-1}}$$

eine Isometrie, wobei wir mit l_g die durch Lemma 60 gegebene Linkswirkung bezeichnen. Mit $D_{\mathbb{1}} S_{\mathbb{1}} = -Id$ folgt daraus unmittelbar $D_{gg^T} S_{gg^T} = -Id$. *QED*

6.6.2. *Der Raum der unimodularen, positiv definiten, symmetrischen Matrizen.*

Definition 54. *Wir bezeichnen mit $P_1(n,\mathbb{R}) \subset P(n,\mathbb{R})$ die Untermannigfaltigkeit der unimodularen Matrizen*

$$P_1(n,\mathbb{R}) = \{A \in P(n,\mathbb{R}) \colon det(A) = 1\}$$

mit der Einschränkung der durch Lemma 61 definierten Riemannschen Metrik.

Lemma 63. *Der Tangentialraum $T_p P_1(n,\mathbb{R})$ in $p \in P_1(n,\mathbb{R})$ ist*

$$S_1(n,\mathbb{R}) = \{A \in S(n,\mathbb{R}) \colon Spur(A) = 0\}.$$

Beweis: Wir identifizieren wieder $X \in S_1(n,\mathbb{R})$ mit dem Tangentialvektor an die durch

$$\mathbb{R} \to P_1(n,\mathbb{R})$$
$$t \to p^{\frac{1}{2}} exp(tX) p^{\frac{1}{2}}$$

gegebene Kurve durch p. *QED*

Lemma 64. *Durch die Einschränkung der in Lemma 60 definierten Wirkung wirkt $SL(n,\mathbb{R})$ transitiv und durch Isometrien auf $P_1(n,\mathbb{R})$, der Stabilisator von $\mathbb{1}$ ist $SO(n)$.*

Beweis: Aus $g \in SL(n,\mathbb{R})$ und $A \in P_1(n,\mathbb{R})$ folgt

$$g \cdot A := gAg^T \in P_1(n,\mathbb{R})$$

wegen

$$det(gAg^T) = det(g) det(A) det(g^T) = 1.$$

Die Transitivität ist wieder ein Spezialfall der Polarzerlegung (Korollar 20). Weil es sich um die Einschränkung der in Lemma 60 definierten isometrischen Wirkung handelt, wird insbesondere die eingeschränkte Riemannsche Metrik erhalten. Der Stabilisator von $\mathbb{1}$ ist

$$O(n) \cap SL(n, \mathbb{R}) = SO(n).$$

QED

Lemma 65. *$P_1(n, \mathbb{R}) = SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$ ist ein symmetrischer Raum.*

Beweis: Die Einschränkung der im Beweis von Lemma 62 definierten Punktspiegelung bildet $S_1(n, \mathbb{R})$ in $S_1(n, \mathbb{R})$ ab und ist somit eine Symmetrie von $P_1(n, \mathbb{R})$. *QED*

Lemma 66. *Wir betrachten die Untermannigfaltigkeiten*

$$P_1(n, \mathbb{R}) \subset P(n, \mathbb{R})$$

und

$$R := \mathbb{R}_{>0} \cdot \mathbb{1} \subset P(n, \mathbb{R})$$

mit den durch Einschränkung induzierten Riemannschen Metriken. Dann ist der durch

$$(A, r\mathbb{1}) \to rA$$

gegebene Diffeomorphismus

$$P_1(n, \mathbb{R}) \times R \cong P(n, \mathbb{R})$$

eine Isometrie.

Beweis: Nach Definition sind die Inklusionen der beiden Faktoren Isometrien. Weil für $X \in S_1(n, \mathbb{R})$

$$Spur(X \cdot \mathbb{1}) = Spur(X) = 0$$

gilt, sind die Bilder von $P_1(n, \mathbb{R})$ und R orthogonal zueinander in $\mathbb{1}$. Die Orthogonalität in anderen Punkten folgt aus der Linksinvarianz der Metrik unter der Wirkung von $GL(n, \mathbb{R})$ und der Tatsache, dass die Wirkung von

$$GL(n, \mathbb{R}) = SL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^*$$

(wobei $s \in \mathbb{R}^*$ auf $\mathbb{R}_{>0}$ durch $r \to s^2 r$ wirkt) die Zerlegung erhält. Also ist $P(n, \mathbb{R})$ das Riemannsche Produkt der beiden Unterräume. *QED*

Lemma 67. *Die Cartan-Zerlegung zu $P_1(n, \mathbb{R}) = SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$ ist*

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{p}$$

mit $\mathfrak{p} = \left\{ A \in Mat(n, \mathbb{R}) \colon A = A^T, Spur(A) = 0 \right\}$.

Beweis: Zu $g \in SL(n, \mathbb{R})$ bezeichnen wir mit l_g die entsprechende Isometrie von $SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$, welche $[h]$ auf $[gh]$ abbildet. Nach Definition 50 ist die Cartan-Involution $\sigma \colon SL(n, \mathbb{R}) \to SL(n, \mathbb{R})$ definiert durch

$$\sigma(g) = S_{[\mathbb{1}]} \circ l_g \circ S_{[\mathbb{1}]} \in Isom(SL(n, \mathbb{R})/SO(n)) = SL(n, \mathbb{R}).$$

Aus

$$S_{[\mathbb{1}]}([h]) = \left[(h^{-1})^T\right]$$

folgt

$$\begin{aligned} \sigma(g)([h]) &= S_{[\mathbb{1}]} \circ l_g \circ S_{[\mathbb{1}]}([h]) \\ &= S_{[\mathbb{1}]}(\left[g(h^{-1})^T\right]) = \left[(g^{-1})^t h\right]) = l_{(g^{-1})^T}([h]), \end{aligned}$$

also $\sigma(g) = (g^{-1})^T$.

Dann ist

$$D_{\mathbb{1}} \sigma(X) = -X^T$$

für alle $X \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$, woraus

$$D_{\mathbb{1}}\sigma|_{\mathfrak{k}} = Id$$

$$D_{\mathbb{1}}\sigma|_{\mathfrak{p}} = -Id$$

für die Cartan-Zerlegung

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{so}(n) \oplus P_1(n,\mathbb{R})$$

folgt. *QED*

Lemma 68. *$P_1(n,\mathbb{R}) = SL(n,\mathbb{R})/SO(n)$ ist ein symmetrischer Raum von nichtkompaktem Typ.*

Beweis: $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ ist halbeinfach, weil die Killingform

$$B(X,Y) = 2n \cdot Spur(XY)$$

nicht-ausgeartet ist. Dies sieht man zum Beispiel, indem man in der Basis

$$H_i = e_{ii} - e_{i+1,i+1}(1 \leq i \leq n-1), X_{ij} = e_{ij}, Y_{ij} = e_{ji}(i < j)$$

berechnet, dass

$$B = 4n \sum_{1\leq i\leq n-1} H_i^2 - 2n \sum_{1\leq i<j\leq n-1} (H_iH_j + H_jH_i) + 4n \sum_{1\leq i<j\leq n-1} X_{ij}Y_{ij}$$

ist.

Die Einschränkung der Killingform auf

$$\mathfrak{p} = \left\{A \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) \colon A = A^T\right\}$$

ist positiv definit wegen

$$B(H_i,H_i) > 0 \ \forall i$$

und

$$B(X_{ij}+Y_{ij}, X_{ij}+Y_{ij}) > 0 \ \forall i,j.$$

Nach Definition 52 bedeutet das, dass $SL(n,\mathbb{R})/SO(n)$ von nichtkompaktem Typ ist. *QED*

Lemma 69. *$P_1(n,\mathbb{R}) = SL(n,\mathbb{R})/SO(n)$ hat nicht-positive Schnittkrümmung.*

Beweis: Für die Killingform B und die Riemannsche Metrik g gilt

$$B = 2n \cdot g.$$

Mit der Rechnung aus dem Beweis von Lemma 17 folgt

$$K(X,Y) = \frac{1}{2n} B([X,Y],[X,Y])$$

für $X,Y \in \mathfrak{p}$. Wegen $[X,Y] \in \mathfrak{k}$ folgt

$$K(X,Y) \leq 0.$$

QED

6.6.3. *Maximale Flachs in SL(n,R)/SO(n).*

Definition 55. *Eine Untermannigfaltigkeit $N \subset M$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) heißt total geodätisch, wenn jede Geodäte in N auch eine Geodäte in M ist.*

Definition 56. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein Flach in M ist eine total geodätische Untermannigfaltigkeit*

$$F \subset M,$$

deren Schnittkrümmung konstant Null ist.

Definition 57. *Der Rang $rg(M)$ eines symmetrischen Raumes M ist die maximale Dimension eines Flachs $F \subset M$.*

> **Beispiel 57** *Symmetrische Räume vom Rang 1.*
> Für symmetrische Räume positiver oder negativer Schnittkrümmung ist $rg(M) = 1$.

Satz 17. *Der Rang von $SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$ ist $n - 1$.*

Beweis: Sei $D \subset SL(n, \mathbb{R})$ der Unterraum der Diagonalmatrizen. Dann ist $D/(D \cap SO(n))$ ein Flach der Dimension $n - 1$ in $SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$, denn Diagonalmatrizen kommutieren und wegen Satz 14 folgt daraus das Verschwinden der Schnittkrümmung.

Wir beweisen nun, dass es keine Flachs der Dimension größer als $n - 1$ gibt.

Aus der Formel im Beweis von Satz 69 und der Nicht-Ausgeartetheit der Killingform folgt, dass eine Untermannigfaltigkeit

$$A \subset SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$$

nur dann flach ist, wenn

$$[X, Y] = 0$$

für alle $X, Y \in T_{x_0}A, x_0 \in A$ gilt.

Sei

$$\mathfrak{a} = T_{[\mathbb{1}]}A \subset T_{[\mathbb{1}]} = \mathfrak{p}.$$

$\mathfrak{p}$ besteht aus symmetrischen Matrizen, die also diagonalisierbar sind. Zwei symmetrische Matrizen kommutieren genau dann, wenn sie in einer gemeinsamen Basis diagonalisierbar sind. Also gibt es ein $g \in GL(n, \mathbb{R})$ mit

$$g\mathfrak{a}g^{-1} \subset D \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}),$$

woraus

$$dim(A) = dim(\mathfrak{a}) \leq n - 1$$

folgt. *QED*

6.7. **Diskrete Gruppen von Isometrien.**

6.7.1. *Lokal symmetrische Räume.*

Definition 58. *Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit heisst lokal symmetrisch, wenn die kovariante Ableitung ∇R des Riemannschen Krümmungstensors R verschwindet:*

$$\nabla R \equiv 0,$$

wobei $\nabla R(T, X, Y, Z, W)$ für Vektorfelder T, X, Y, Z, W durch

$$Tg(R(X,Y)Z,W) - (g(R(\nabla_T X,Y)Z,W) + g(R(X,\nabla_T Y)Z,W) + g(R(X,Y)\nabla_T Z,W) + g(R(X,Y)Z,\nabla_T W))$$

definiert ist

Lemma 70. *Symmetrische Räume sind lokal symmetrisch.*

Beweis: Wir beweisen die Identität $\nabla R = 0$ in einem beliebigen Punkt x eines symmetrischen Raumes. Für die Symmetrie S_x in x gilt $D_x S_x = -Id$, mithin

$$\nabla R(T,X,Y,Z,W) = \nabla R(S_xT, S_xX, S_xY, S_xZ, S_xW)$$
$$= \nabla R(-T,-X,-Y,-Z,-W) = (-1)^5 \nabla R(T,X,Y,Z,W),$$

woraus $\nabla R(T,X,Y,Z,W) = 0$ für alle in einer Umgebung von x definierten Vektorfelder T,X,Y,Z,W folgt. *QED*

Definition 59. *Eine Wirkung einer Gruppe Γ auf einem topologischen Raum M heißt eigentlich diskontinuierlich, wenn es zu jedem $x \in M$ eine offene Umgebung U mit*

$$\sharp\{\gamma \in \Gamma \colon \gamma \cdot U \cap U \neq \emptyset\} < \infty$$

gibt.

Definition 60. *Eine Wirkung einer Gruppe Γ auf einem topologischen Raum M heißt fixpunktfrei, wenn es kein $x \in M$ und kein $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathbb{1}\}$ mit $\gamma \cdot x = x$ gibt.*

Lemma 71. *Wenn eine Gruppe Γ eigentlich diskontinuierlich und fixpunktfrei auf einem topologischen Raum M wirkt, dann gibt es zu jedem $x \in M$ eine Umgebung U mit*

$$\gamma \cdot U \cap U = \emptyset$$

für alle $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathbb{1}\}$.

Beweis: Angenommen, das wäre nicht der Fall. Dann gibt es insbesondere ein $x \in M$ und eine absteigende Folge kompakter Umgebungen K_i mit

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i = \{x\},$$

zu denen man $\gamma_i \in \Gamma$ mit

$$\gamma_i K_i \cap K_i \neq \emptyset$$

findet. Es gibt also $x_i \in K_i$ mit $\gamma_i x_i \in K_i$.

Weil es bereits für K_0 nur endlich viele γ mit $\gamma \cdot K_0 \cap K_0 \neq \emptyset$ gibt, muss es ein $\gamma \neq \mathbb{1}$ und eine unendliche Folge $x_i \in K_i$ mit $\gamma x_i \in K_i$ geben. Wegen $x = \lim_{i\to\infty} x_i$ und $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i = \{x\}$ folgt $\gamma \cdot x = x$ im Widerspruch zur Vorausssetzung. *QED*

Lemma 72. *Wenn M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und Γ eine eigentlich diskontinuierlich und fixpunktfrei wirkende Gruppe von Isometrien ist, dann ist $\Gamma \backslash M$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und die Projektion*

$$\pi \colon M \to \Gamma \backslash M$$

eine lokale Isometrie.

Beweis: Zu $x \in M$ sei U_x eine nach Lemma 71 existierende Umgebung mit $\gamma \cdot U_x \cap U_x = \emptyset$ für alle $\gamma \neq \mathbb{1}$. Dann ist $\pi|_{U_x} \colon U_x \to \pi(U_x)$ ein Diffeomorphismus auf sein Bild, insbesondere kann man die Riemannsche Metrik auf $\pi(U_x)$ so definieren, dass $pi|_{U_x}$ eine Isometrie ist. Einen Atlas für M/Γ erhält man durch

$$\left\{(\pi(U_x), \phi_x \circ (\pi|_{U_x})^{-1}) \colon x \in M\right\}$$

und die auf diesen Karten definierten Riemannschen Metriken sind miteinander kompatibel. *QED*

Lemma 73. *Wenn M ein symmetrischer Raum ist und $\Gamma \subset Isom(M)$ eigentlich diskontinuierlich und fixpunktfrei auf M wirkt, dann ist $\Gamma \backslash M$ lokal symmetrisch.*

Beweis: Um die Gültigkeit der Gleichung $\nabla R \equiv 0$ in einem Punkt zu überprüfen, genügt es eine Umgebung dieses Punktes zu betrachten. Nach Lemma 72 ist die Projektion $\pi \colon M \to \Gamma \backslash M$ eine lokale Isometrie, also genügt es die Gleichung $\nabla R \equiv 0$ in einem Punkt x des symmetrischen Raumes M zu überprüfen, was wir im Beweis von Lemma 70 getan haben. *QED*

Lemma 74. *Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wenn $\Gamma \subset Isom(M)$ eine diskrete Untergruppe ist, dann wirkt Γ eigentlich diskontinuierlich.*

Beweis: Angenommen, Γ wirke nicht eigentlich diskontinuierlich. Dann gibt es insbesondere eine absteigende Folge kompakter Mengen K_i mit $diam(K_i) < \frac{1}{i}$ und

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i = \{x\}$$

sowie eine unendliche Folge unterschiedlicher Elemente $\gamma_i \in \Gamma$ mit

$$\gamma_i K_i \cap K_i \neq \emptyset.$$

Man findet also $x_i \in K_i$ mit $\gamma_i x_i \in K_i$.

Weil die γ_i Isometrien sind, müssen dann alle $\gamma_i \cdot x$ in einer $\frac{1}{i}$-Umgebung von K_i und insbesondere innerhalb einer kompakten Menge K liegen.

Wir bezeichnen mit $T_x^1 M = \{v \in T_x M \colon \parallel v \parallel = 1\}$ den Einheitstangentialraum, der eine kompakte Teilmenge von $T_x M$ ist. Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Orthonormalbasis von $T_x M$. Aus Lemma 44 folgt, dass man $Isom(M)$ mittels der Abbildung

$$f \longrightarrow (f(x), D_x f(e_1), \ldots, D_x f(e_n))$$

in $M \times (T_1 M)^n$ einbetten kann. Insbesondere liegen die γ_i vermittels dieser Einbettung in der kompakten Teilmenge

$$K \times (T^1 K)^n.$$

Es gibt also eine gegen ein $\gamma \in Isom(M)$ konvergierende Teilfolge. Weil $\Gamma \subset Isom(M)$ eine diskrete Untergruppe ist, müssen fast alle γ_i aus dieser konvergierenden Teilfolge mit dem Grenzwert γ übereinstimmen. Das ist ein Widerspruch. *QED*

Korollar 19. *Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wenn eine Untergruppe $\Gamma \subset Isom(M)$ diskret und torsionsfrei ist, dann wirkt Γ eigentlich diskontinuierlich und fixpunktfrei auf M.*

Beweis: Nach Lemma 74 wirkt Γ eigentlich diskontinuierlich. Es bleibt nachzuprüfen dass Γ ohne Fixpunkte wirkt.

Angenommen $\gamma x = x$, dann gilt auch $\gamma^n x = x$ und weil Γ torsionsfrei ist, erhalten wir eine unendliche Folge unterschiedlicher Isometrien, die x festlassen. Diese Folge liegt dann mit dem Beweis von Lemma 74 in der kompakten Teilmenge $(T_x^1 M)^n$. Das ist ein Widerspruch zur Diskretheit von Γ. *QED*

Beispiel 58 *Mannigfaltigkeiten konstanter Schnittkrümmung*

Wenn $\widetilde{M}$ entweder die Sphäre S^n oder der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ oder der hyperbolische Raum $\mathbb{H}^n$ ist und

$$\Gamma \subset Isom(\widetilde{M})$$

eine diskrete, torsionsfreie Untergruppe ist, dann trägt

$$\Gamma \backslash \widetilde{M}$$

eine Riemannsche Metrik konstanter Schnittkrümmung.

Beispiel 59 *Die Modulkurve*

$SL(2,\mathbb{Z}) \subset SL(2,\mathbb{R})$ wird von den Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugt. Aus Beispiel 48 wissen wir, dass die hyperbolische Ebene $\mathbb{H}$ der Riemannsche homogene Raum $SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ mit $Isom^+(\mathbb{H}) = PSL(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})/\pm\mathbb{1}$ ist. Insbesondere ist $PSL(2,\mathbb{Z}) = SL(2,\mathbb{Z})/\pm\mathbb{1}$ eine diskrete Untergruppe von $Isom(\mathbb{H}^2)$.

Die "Modulgruppe" $SL(2,\mathbb{Z})$ ist nicht torsionsfrei, sie ist isomorph zum amalgamierten Produkt

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

und wird erzeugt von den Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, die Ordnung 6 bzw. 4 haben. Sie hat aber die von $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugte Untergruppe $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{Z})$ vom Index 12, die eine freie Gruppe und insbesondere torsionsfrei ist.

Die "Modulkurve"

$$SL(2,\mathbb{Z})\backslash SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$$

ist keine Riemannsche Mannigfaltigkeit, sie hat aber die verzweigte Überlagerung

$$\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{R})/SO(2),$$

die ein lokal symmetrischer Raum ist.

Allgemein besagt das *Selberg-Lemma*, dass es zu jeder diskreten Untergruppe einer linearen Gruppe eine Untergruppe von endlichem Index gibt, die torsionsfrei ist.

6.7.2. *Diskrete Gruppen und Fundamentalbereiche.*

Definition 61. *Ein Fundamentalbereich für die Wirkung einer Gruppe Γ auf einem toplogischen Raum M ist eine offene Menge $D \subset M$ mit den folgenden Eigenschaften:*

- *Der innere Kern des Abschlusses $\overline{D}$ ist D.*
- *$M = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma \cdot \overline{D}$.*
- *Für alle $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathbb{1}\}$ ist $\gamma \cdot D \cap D = \emptyset$.*
- *Zu $x \in M$ gibt es nur endlich viele $\gamma \in \Gamma$ mit $x \in \gamma \cdot \overline{D}$.*

Lemma 75. *Wenn es für die Wirkung einer Gruppe $\Gamma \subset Isom(M)$ auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M einen Fundamentalbereich gibt, dann ist Γ eine diskrete Untergruppe von $Isom(M)$.*

Beweis: Sei $x \in D$ ein Punkt im Inneren des Fundamentalbereichs. Dann ist der Orbit $\Gamma \cdot x$ eine diskrete Teilmenge von M. Insbesondere ist $Stab(x)$ eine offene Teilmenge von Γ. Wegen $\gamma \cdot D \cap D = \emptyset$ folgt aber $\gamma \cdot x \neq x$ für alle $\gamma \in \Gamma$. Also ist $Stab(x) = \{\mathbb{1}\}$ und $\{\mathbb{1}\}$ ist eine offene Teilmenge von Γ. Weil Linksmultiplikation mit γ ein Homöomorphismus ist, ist dann auch jedes andere $\{\gamma\}$ eine offene Menge und Γ ist diskret.

QED

Beispiel 60 *Fundamentalbereich für die Modulgruppe*

$SL(2,\mathbb{Z})$ ist eine diskrete Untergruppe von $SL(2,\mathbb{R})$. und wirkt durch gebrochen-lineare Transformationen

$$\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right) \cdot z := \frac{az+b}{cz+d}$$

auf der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}$. Man kann zeigen, dass

$$\left\{ z \in \mathbb{H}^2 \colon -\frac{1}{2} < Re(z) < \frac{1}{2}, \parallel z \parallel > 1 \right\}$$

ein Fundamentalbereich ist.

Man beachte, dass es Fixpunkte einzelner Gruppenelemente auf dem Rand $\partial \overline{D}$ gibt.

Einen Fundamentalbereich für die in Beispiel 59 beschriebene torsionsfreie Untergruppe $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{Z})$ erhält man, indem man 12 Kopien von D (und Teile ihrer Ränder) zusammenfügt.

6.7.3. *Beispiele sphärischer Manigfaltigkeiten.*

Beispiel 61 *Linsenräume*

Seien p und q teilerfremde ganze Zahlen. Die Gruppe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der p-ten Einheitswurzeln wirkt auf $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ fixpunktfrei durch

$$k \cdot (z_1, z_2) := (e^{\frac{k}{p}2\pi i} z_1, e^{\frac{kq}{p}2\pi i} z_2),$$

der Quotient

$$L(p,q) = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \backslash S^3$$

ist der Linsenraum $L(p,q)$.

Zum Beispiel sind die Linsenräume $L(5,1)$ und $L(5,2)$ nicht homotopie-äquivalent, obwohl sie dieselben Homotopiegruppen haben. Hingegen sind $L(7,1)$ und $L(7,2)$ homotopie-äquivalent, obwohl sie nicht homöomorph sind.

Beispiel 62 *Die Poincarésche Homologiesphäre*

Die Gruppe der orientierungs-erhaltenden Isometrien des Ikosaeders ist eine Untergruppe von $SO(3)$, die zur alternierenden Gruppe $A_5 \subset S_5$ isomorph ist.

Nach Lemma 1 haben wir eine 2-fache Überlagerung

$$Ad \colon SU(2) \to SO(3).$$

Das Urbild $Ad^{-1}(A_5)$ ist eine Untergruppe Γ mit 120 Elementen in $SU(2)$.

Vermittels des Diffeomorphismus

$$SU(2) \cong S^3$$

wirkt Γ fixpunktfrei auf S^3. Die Quotientenmannigfaltigkeit

$$\Gamma \backslash S^3$$

hat Fundamentalgruppe Γ und ist eine Homologiesphäre, weil

$$\Gamma / [\Gamma, \Gamma] = 0$$

ist.

6.7.4. *Beispiele euklidischer Mannigfaltigkeiten.*

Beispiel 63 *Tori*

Zu jeder komplexen Zahl τ mit von Null verschiedenem Imaginärteil spannen 1 und τ ein Gitter L in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ auf. Wir bekommen alle Gitter, wenn wir τ in der oberen Halbebene wählen, und wir bekommen äquivalente Gitter, wenn wir τ in einem $SL(2,\mathbb{Z})$-Orbit für die Wirkung durch geschlossen-lineare Transformationen betrachten. Die Menge aller Gitter ist also die Modulkurve

$$SL(2,\mathbb{Z}) \backslash SL(2,\mathbb{R}) / SO(2).$$

Für jedes Gitter $L \subset \mathbb{R}^2$ ist der Quotient $L \backslash \mathbb{R}^2$ ein Torus. Weil das Gitter eigentlich diskontuinierlich auf $\mathbb{R}^2$ wirkt, erhält man Metriken konstanter Schnittkrümmung $K \equiv 0$ auf dem Torus.

6.7.5. *Beispiele hyperbolischer Mannigfaltigkeiten.*

Beispiel 64 *Hyperbolische Flächen*

Wähle in der hyperbolischen Ebene ein $4g$-Eck mit Innenwinkelsumme 2π und dessen Seiten sich in Paaren so durch orientierungserhaltende Isometrien $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ der hyperbolischen Ebene identifizieren lassen, dass die Quotientenfläche eine geschlossene, orientierbare Fläche Σ_g vom Geschlecht g ist. Die von den Isometrien $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ erzeugte Untergruppe

$$\Gamma \subset Isom^+(\mathbb{H}^2) \cong PSL(2,\mathbb{R})$$

ist nach dem Satz von Poincaré über Fundamentalpolyeder - einen vollständigen Beweis findet man in *B. Maskit: "On Poincaré's theorem for fundamental polygons", Adv. Math. 7, 219-230 (1971)* - eine diskrete Untergruppe und sie ist isomorph zur Fundamentalgruppe $\pi_1 \Sigma_g$. Insbesondere hat

$$\Sigma_g = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$$

Metriken konstanter Schnittkrümmung $K \equiv -1$.

Beispiel 65 *Das Komplement des Achterknotens*

Die Fundamentalgruppe des Komplements des Achterknotens kann mit dem Wirtinger-Kalkül berechnet werden, sie hat Erzeuger a, b mit einer Relation $ab^{-1}a^{-1}ba = bab^{-1}a^{-1}b$. Sie ist torsionsfrei. Durch

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \rho(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\omega = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ kann man einen injektiven Homomorphismus nach $PSL(2,\mathbb{C}) \cong Isom^+(\mathbb{H}^3)$ definieren. Dessen Bild Γ ist diskret, weil es in der diskreten Untergruppe

$$PSL(2,\mathbb{Z}[\omega]) \subset PSL(2,\mathbb{C})$$

enthalten ist. Der Quotient $\Gamma \backslash \mathbb{H}^3$ ist homöomorph zum Komplement des Achterknotens, das damit eine Metrik konstanter Schnittkrümmung $K \equiv -1$ trägt.

Thurston gibt eine geometrische Interpretation dieser Konstruktion, indem er das Komplement des Achterknotens in zwei ideale Tetraeder zerlegt und die Identifizierungsabbildungen der Randflächen durch Isometrien der hyperbolischen Metrik realisiert.

Allgemeiner bewies Thurston die Existenz hyperbolischer Metriken auf den Komplementen aller Knoten, die keine Torusknoten oder Satellitenknoten sind.

7. Anhang

7.1. **Eigenschaften von Matrizen.**

7.1.1. *Polarzerlegung.*

Lemma 76. *Jede Matrix $A \in GL(n, \mathbb{R})$ lässt sich auf eindeutige Weise als Produkt aus einer orthogonalen Matrix und einer symmetrischen, positiv definiten Matrix zerlegen.*

Beweis: Für $A \in GL(n, \mathbb{R})$ ist AA^T eine symmetrische, positiv definite Matrix. Damit ist AA^T diagonalisierbare und es gibt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Somit gibt es eine Matrix $B \in GL(n, \mathbb{R})$ mit

$$AA^T = BDB^T$$

für eine Diagonalmatrix D, deren Einträge positiv sind und aus der man demzufolge die Quadratwurzel ziehen kann. Die Matrix $A(B\sqrt{D}B^T)^{-1}$ ist orthogonal, man erhält die Zerlegung

$$A = (A(B\sqrt{D}B^{-1})^{-1})(B\sqrt{D}B^{-1})$$

in eine orthogonale und eine symmetrisch, positiv definite Matrix.

Die Eindeutigkeit ergibt sich daraus, dass eine von $\mathbb{1}$ verschiedene Matrix in $GL(n, \mathbb{R})$ nicht gleichzeitig orthogonal, symmetrisch und positiv definit sein kann. Aus $AA^T = \mathbb{1}$ und $A = A^T$ folgt nämlich $A^2 = \mathbb{1}$, die Eigenwerte sind also $\pm^1$ und wegen der positiven Definitheit dann alle 1. QED

Korollar 20. *Jede Matrix $A \in SL(n, \mathbb{R})$ lässt sich auf eindeutige Weise als Produkt aus einer Matrix in $SO(n)$ und einer symmetrischen, positiv definiten Matrix mit Determinante 1 zerlegen.*

Beweis: Aus $det(A) = 1$ folgt $det(AA^T) = 1$. Damit ist $det(D) = 1$ und damit wegen der positiven Definitheit auch $det(\sqrt{D}) = 1$. Es folgt $det(A(B\sqrt{D}B^{-1})^{-1}) = 1$ und $det(B\sqrt{D}B^{-1}) = 1$. QED

Lemma 77. *Jede Matrix $A \in GL(n, \mathbb{C})$ lässt sich auf eindeutige Weise als Produkt aus einer unitären Matrix und einer hermiteschen, positiv definiten Matrix zerlegen.*

Beweis: Für $A \in GL(n, \mathbb{C})$ ist $A\overline{A}^T$ eine hermitesche Matrix mit reellen, positiven Eigenwerten. Damit ist sie wieder von der Form

$$A\overline{A}^T = B^{-1}DB^{-1}$$

für eine unitäre Matrix B und eine Diagonalmatrix D, deren Einträge positiv sind und aus der man demzufolge die Quadratwurzel ziehen kann. Die Matrix $A(B\sqrt{D}B^{-1})^{-1}$ ist unitär, man erhält die Zerlegung

$$A = (A(B\sqrt{D}B^{-1})^{-1})(B\sqrt{D}B^{-1})$$

in eine unitäre und eine hermitesche, positiv definite Matrix.

Die Eindeutigkeit folgt analog zum Beweis in Lemma 76 daraus, dass eine von $\mathbb{1}$ verschiedene Matrix in $GL(n, \mathbb{C})$ nicht gleichzeitig unitär und hermitesch sein und positive Eigenwerte haben kann. QED

7.1.2. *Drehmatrizen.*

Lemma 78. *Jede Matrix $A \in SO(2)$ ist von der Form*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Beweis: Weil beide Zeilen Norm 1 haben, gibt es zunächst ϕ und ψ mit

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}.$$

Aus Orthogonalität der beiden Zeilen folgt

$$0 = \cos\phi\sin\psi - sin\phi\cos\psi = \sin(\phi - \psi),$$

mithin $\phi \equiv \psi \ mod \ 2\pi$. *QED*

Definition 62. *Sei $n \geq 2$. Eine Drehmatrix ist eine Matrix $A \in GL(n, \mathbb{R})$ von der Form*

$$A = BR_\phi B^{-1}$$

mit $B \in GL(n, \mathbb{R})$. Hierbei bezeichnet R_ϕ das Bild von $\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ unter der kanonischen Einbettung mittels Blockmatrizen $GL(2, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$.

Lemma 79. *Für $n \geq 2$ lässt sich jede Matrix aus $SO(n)$ als Produkt von Drehmatrizen darstellen.*

Beweis: Sei $A \in SO(n)$. Aus der Orthogonalität folgt, dass alle Eigenwerte den Betrag 1 haben. Betrachten wir einen einzelnen Eigenwert λ_1. Falls dieser Eigenwert reell ist, also $\lambda_1 = \pm 1$, haben wir einen Eigenvektor v mit $Av = \pm v$. Wegen der Orthogonalität muss A das orthogonale Komplement von v auf sich abbilden, wir erhalten also in einer geeigneten Basis eine Blockzerlegung von A. Falls $\lambda_1 = e^{i\phi}$ nicht reell ist, dann muss (weil das charakteristische Polynom reelle Koeffizienten hat) auch $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = e^{-i\phi}$ ein Eigenwert sein und es gibt Vektoren v_1, v_2 mit $Av_1 = \cos\phi v_1 + \sin\phi v_2, Av_2 = -\sin\phi v_1 + \cos\phi v_2$. Wegen der Orthogonalität muss A wieder das orthogonale Komplement von $\langle v_1, v_2 \rangle$ auf sich abbilden, wir erhalten also wieder eine Blockzerlegung von A. Iteration dieses Arguments beweist, dass jede Matrix in $SO(n)$ durch einen geeigneten Basiswechsel konjugiert zu einer Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} R_1 & & & & & \\ & \ldots & & 0 & & \\ & & R_k & & & \\ & & & \pm 1 & & \\ & 0 & & & \ldots & \\ & & & & & \pm 1 \end{pmatrix}$$

mit Drehmatrizen $R_1, \ldots, R_k$ und wegen $det(A) = 1$ mit einer geraden Anzahl von -1-Einträgen. Weil die Matrizen $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und (1) ebenfalls Drehmatrizen sind, folgt die Behauptung. *QED*

Lemma 80. *Jede Matrix $A \in SU(2)$ ist von der Form*

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix}$$

mit

$$(z_1, z_2) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2.$$

Beweis: Weil die erste Zeile Norm 1 hat, muss sie von der Form (z_1, z_2) mit $\| z_1 \|^2 + \| z_2 \|^2 = 1$ sein. Weil die zweite Zeile bzgl. des hermiteschen Skalarproduktes zur ersten orthogonal ist, muss sie von der Form $(-k\overline{z_2}, k\overline{z_1})$ mit $k \in \mathbb{C}$ sein. Aus $det(A) = 1$ folgt $k = 1$. *QED*

Korollar 21. *$SU(2)$ ist diffeomorph zur 3-dimensionalen Sphäre S^3.*

Beweis: Aus dem Beweis von Lemma 80 erhält man eine Bijektion

$$f\colon SU(2) \to S^3.$$

Man rechnet nach, dass in den durch den Beweis von Satz 18 gegebenen Karten f und f^{-1} differenzierbar sind. *QED*

7.2. **Differentialrechnung auf Mannigfaltigkeiten.**

7.2.1. *Differenzierbare Mannigfaltigkeiten.*

Definition 63. *Sei X ein topologischer Raum. Eine Karte (U, ϕ) ist eine offene Teilmenge $U \subset X$ mit einem Homöomorphismus $\phi\colon U \to \phi(U)$ auf eine offene Teilmenge $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ eines $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$.*

Punkte in U werden also durch n reelle Parameter eindeutig beschrieben. Man bezeichnet Karten bzw. deren Umkehrabbildungen deshalb auch als lokale Parametrisierungen oder lokale Koordinaten.

Definition 64. *Sei X ein topologischer Raum. Ein Atlas X ist eine Familie von Karten $\{(U_i, \phi_i)\}$, die X überdecken:*

$$X = \cup_i U_i,$$

so dass für alle i, j mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ der Kartenwechsel

$$\phi_i \phi_j^{-1}\colon \phi_j(U_i \cap U_j) \to \phi_i(U_i \cap U_j)$$

ein Diffeomorphismus, also eine differenzierbare Abbildung mit differenzierbarer Umkehrabbildung ist.

Beispiel 66 *Offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$*
Sei X eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\{(X, id)\}$ ein Atlas.

Beispiel 67 *1-dimensionale Sphäre*
Sei $X = S^1 \subset \mathbb{C}$ der Einheitskreis in der komplexen Zahlenebene. Auf

$$U_1 = S^1 \setminus \{-i\}$$

betrachten wir die stereographische Projektion

$$\phi_1(z) = \frac{2Re(z)}{1 + Im(z)}$$

und auf

$$U_2 = S^1 \setminus \{i\}$$

die stereographische Projektion

$$\phi_2(z) = \frac{2Re(z)}{1 - Im(z)}.$$

Dann ist

$$\{(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)\}$$

ein Atlas, denn beide Abbildungen sind Bijektionen und man rechnet nach, dass der Kartenwechsel $\phi_2 \phi_1^{-1}$ ist ein Diffeomorphismus von $\phi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ auf $\phi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist.

Beispiel 68 *n-dimensionaler Torus*

Sei $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ der n-dimensionale Torus. Jede Äquivalenzklasse $[x]$ hat ein eindeutiges Urbild $x \in [0,1)^n \subset \mathbb{R}^n$ und zu diesem eine Umgebung

$$V_x = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \colon max\left\{ \mid y_1 - x_1 \mid, \ldots, \mid y_n - x_n \mid \right\} < \frac{1}{2} \right\},$$

so dass die Einschränkung der Projektion $\pi\colon \mathbb{R}^n \to T^n$ auf V_x ein Diffeomorphismus ist. Insbesondere ist

$$\left\{ (U_x = \pi(V_x), \phi_x = (\pi|_{V_x})^{-1})\colon\ [x] \in T^n \right\}$$

ein Atlas von T^n, die Kartenwechsel sind Translationen.

Definition 65. *Zwei Atlanten auf demselben topologischen Raum heißen kompatibel, wenn ihre Vereinigung ebenfalls ein Atlas ist, also alle Kartenwechsel Diffeomorphismen sind. Die Äquivalenzklassen von Atlanten werden als Differentialstrukturen bezeichnet.*

Definition 66. *Eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist ein Hausdorff-Raum, dessen Topologie eine abzählbare Basis besitzt, zusammen mit einer Differentialstruktur, deren Karten ihre Bilder im $\mathbb{R}^n$ haben.*

7.2.2. *Differenzierbare Abbildungen.*

Definition 67. *Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Atlanten $\left\{(U_i, \phi_i)\right\}_i$ bzw. $\left\{(V_j, \psi_j)\right\}_j$. Eine Abbildung*

$$f\colon M \to N$$

heißt differenzierbar in p, wenn für alle i, j mit $p \in U_i, f(p) \in V_j$ die Abbildung

$$\psi_j f \phi_i^{-1}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

differenzierbar in $\phi_i(p)$ ist.

Sie heißt eine Submersion / Immersion / lokaler Diffeomorphismus in p, falls das Differential von $\psi_j f \phi_i^{-1}$ in $\phi_i(p)$ surjektiv / injektiv / bijektiv ist. Sie heißt ein Diffeomorphismus, wenn sie eine Bijektion und in jedem Punkt ein lokaler Diffeomorphismus ist.

Wegen der Kompatibilität der Karten genügt es jeweils, diese Bedingungen für ein Paar (i, j) mit $p \in U_i, f(p) \in V_j$ nachzuprüfen.

Satz 18. *Sei M eine differenzierbare $(n+m)$-Mannigfaltigkeit und $f\colon M \to \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung, die eine Submersion in allen Punkten von $f^{-1}(0)$ ist. Dann ist $f^{-1}(0)$ eine differenzierbare n-Mannigfaltigkeit.*

Beweis: Es genügt, die Behauptung für offene Teilmengen $M = U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ zu beweisen.

Sei $p \in f^{-1}(0)$. Nach Voraussetzung hat die Matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1\le i\le m, 1\le j\le m+n}$ den Rang m. Nach Vertauschen der Koordinaten $x_1, \ldots, x_{m+n}$ können wir annehmen, dass die Matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1\le i,j\le m}$ invertierbar ist.

Wir betrachten nun $G\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n}$ definiert durch

$$G(x_1, \ldots, x_{m+n}) = (f(x_1, \ldots, x_{m+n}), x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}).$$

Deren Differential in p ist die Blockmatrix

$$D_pG = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right)_{1\le j\le m} & \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right)_{m+1\le j\le m+n} \\ 0 & \mathbb{1}_n \end{pmatrix},$$

die Rang $m+n$ hat und demzufolge invertierbar ist. Nach dem Satz über die Umkehrabbildung gibt es dann in $\mathbb{R}^{m+n}$ Umgebungen U und V von p und $G(p)$, zwischen denen G ein Diffeomorphismus ist. Dieser Diffeomorphismus bildet

$$U \cap f^{-1}(0)$$

auf

$$V \cap (\{0\}^m \times \mathbb{R}^n)$$

ab, Verknüpfung mit der Projektion $\{0\}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gibt einen Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Damit haben wir eine Karte definiert, Kompatibilität der Karten ergibt sich aus der Blockgestalt von D_pG. *QED*

7.3. **Tangentialraum und Vektorfelder.**

7.3.1. *Tangentialraum.* Zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M und einem Punkt $x \in M$ betrachten wir Kurvenstücke durch x, d.h. differenzierbare Abbildungen

$$c\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$$

mit $\epsilon > 0$ und $c(0) = x$.

Wir betrachten folgende Äquivalenzrelation auf Kurvenstücken: c_1 und c_2 heißen äquivalent, wenn es es eine Karte ϕ gibt, so dass

$$(\phi \circ c_1)'(0) = (\phi \circ c_2)'(0).$$

(Wenn diese Bedingung in einer Karte erfüllt ist, dann gilt sie wegen der Kompatibilitätsbedingung auch in jeder anderen.)

Der **Tangentialraum** T_xM wird definiert als die Menge der Äquivalenzklassen von Kurvenstücken durch x, letztere werden als **Tangentialvektor**en bezeichnet.

Für $M = \mathbb{R}^n$ ist $T_xM = \mathbb{R}^n$ vermittels der Bijektion $[c] \to c'(0)$. Für beliebige n-dimensionale Mannigfaltigkeiten vermittelt das Differential einer Karte $\phi\colon U \to V$ ebenfalls eine Bijektion $T_xM \to T_\phi(x)\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$. Diese Bijektion kann man nutzen, um auf T_xM Addition und Skalarprodukt zu definieren. Weil das Differential der Kartenübergänge eine lineare Abbildung ist, hängt diese Vektorraumstruktur nicht von der Wahl der definierenden Karte ab. Das **Tangentialbündel**

$$TM = \cup_{x \in M} T_xM$$

ist ein Vektorraumbündel, d.h. die Vektorraumoperationen hängen differenzierbar vom Basispunkt x ab.

Zusammengefasst können wir ohne Rückgriff auf die Anschauung die folgende Definition formulieren.

Definition 68. *a) Für eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir*

$$TV = V \times \mathbb{R}^n$$

mit den faserweisen Vektorraumoperationen

$$(x, v_1) + \lambda(x, v_2) = (x, v_1 + \lambda v_2)$$

und für $x \in V, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$.
b) Für eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M mit Atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ definieren wir

$$TM = \cup_{i \in I}(U_i \times \mathbb{R}^n)/\sim$$

mit

$$(x, v) \sim (x, D(\phi_i \phi_j^{-1})v)$$

für $x \in U_i \cap U_j$. Die faserweisen Vektorraumoperationen sind definiert durch

$$(x, v_1) + \lambda(x, v_2) = (x, v_1 + \lambda v_2)$$

und für $x \in V, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$.

Für $x \in M$ bildet die Menge aller (x, v) den Tangentialraum T_xM in x.

Für eine differenzierbare Abbildung $f: M \to N$ wird das Differential

$$Df: TM \to TN$$

definiert durch

$$D_xf(v) := D\psi_j^{-1} D(\psi_j f \phi_i^{-1}) D\phi_i(v) \in T_{f(x)}N$$

für $v \in T_xM$, wobei (U_i, ϕ_i) eine Karte um x und (V_j, ψ_j) eine Karte um $f(x)$ ist. Hierbei meinen wir mit $D\phi_i$ die sich aus der Einbettung $U_i \times \mathbb{R}^m \subset TM$ und $\phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^m \subset T\mathbb{R}^m$ ergebende Identifizierung, entsprechend für $D\psi_j$.

Aus der Kompatibilität der Karten folgt wieder, dass diese Definition nicht von der Wahl der Karte abhängt.

Für differenzierbare Abbildungen $f: M_1 \to M_2, g: M_2 \to M_3$ gilt

$$D_x(g \circ f) = D_{f(x)}g \circ D_xf.$$

Satz 19. *Unter den Voraussetzungen von Satz 18 ist*

$$TM = \{(x, v): f(x) = 0, D_xf(v) = 0\}.$$

Beweis: Sei $x \in M$. Dann ist nach Voraussetzung $rank(D_xf) = m$, nach dem Rangsatz also $dim(ker(D_xf)) = n$.

Sei $v \in T_xM$. Dann gibt es eine Kurve γ in M mit $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$. Weil γ in $M = f^{-1}(0)$ liegt, ist $f \circ \gamma$ identisch Null. Daraus folgt

$$D_xf(v) = (f \circ \gamma)'(0) = 0.$$

Das beweist

$$T_xM \subset \left\{v \in \mathbb{R}^{m+n}: D_xf(v) = 0\right\} = ker(D_xf).$$

Weil T_xM ein n-dimensionaler Vektorraum ist, folgt daraus aber bereits die Gleichheit. *QED*

Beispiel 69 *Tangentialraum der Sphäre*

Die Sphäre S^n ist die Nullstellenmenge der Submersion

$$f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 - 1.$$

Deren Differential in $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ ist $2(x_1, \ldots, x_{n+1})$, mithin ist der Tangentialraum

$$T_xS^n = \left\{v \in \mathbb{R}^{n+1}: \langle x, v\rangle = 0\right\}.$$

Lemma 81. *Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Atlanten $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ bzw. $\{(V_j, \psi_j)\}_{j\in J}$. Dann ist $M \times N$ mit dem Atlas*

$$\left\{(U_i \times V_j, \phi_i \times \psi_j)\right\}_{(i,j)\in I\times J}$$

eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, deren Tangentialraum in $(x, y) \in M \times N$ die direkte Summe $T_xM \oplus T_yN$ ist.

Beweis: Die $U_i \times V_j$ überdecken $M \times N$. Wir müssen zeigen, dass die Kartenübergänge Diffeomorphismen sind. Diese sind von der Form

$$(\phi_i \times \psi_j)(\phi_k \times \psi_l)^{-1} = (\phi_i\phi_k^{-1}) \times (\psi_j\psi_l^{-1})$$

und mithin differenzierbar. Das Differential ist die Blockmatrix, deren beide Blöcke die Differentiale von $\phi_i\phi_k^{-1}$ und $\psi_j\psi_l^{-1}$ sind. Die Formel für den Tangentialraum gilt für offene Teilmengen in $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ und überträgt sich dann entsprechend auf Mannigfaltigkeiten. *QED*

7.3.2. *Orientierbarkeit.* Sei V ein reeller Vektorraum. Zu zwei Basen

$$\{e_1, \ldots, e_n\}, \{f_1, \ldots, f_n\}$$

gibe es eindeutige $a_{ij} \in \mathbb{R}$ mit

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j, i = 1, \ldots, n.$$

Sei A die Matrix mit den Einträgen a_{ij}. Wir sagen, dass die Basen gleich orientiert sind wenn $det(A) > 0$, und dass sie unterschiedlich orientiert sind wenn $det(A) < 0$. Dies definiert eine Äquivalenzrelation mit genau zwei Äquivalenzklassen auf der Menge aller Basen eines gegebenen Vektorraums.

Für $V = \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir die Basen in der Äquivalenzklasse der Standardbasis als positiv orientiert, die anderen als negativ orientiert.

Für eine Mannigfaltigkeit M sagen wir, dass ein differenzierbarer Atlas

$$\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$$

orientierbar ist, wenn für alle $i, j \in I$ das Differential des Kartenübergangs $\phi_i \phi_j^{-1}$ in allen Punkten von $U_i \cap U_j$ positive Determinante hat. Eine orientierbare Mannigfaltigkeit ist eine Mannigfaltigkeit mit orientierbarem Atlas.

In diesem Fall sagen wir, dass eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von $T_x M$ positiv bzw. negativ orientiert ist, wenn für eine (und damit wegen der Orientierbarkeit des Atlas für jede) Karte $\{(U_i, \phi_i)\}$ mit $x \in U_i$ gilt dass

$$\{D_x \phi_i(v_1), \ldots, D_x \phi_i(v_n)\}$$

eine positiv bzw. negativ orientierte Basis von $T_{\phi_i(x)} \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ ist.

Eine differenzierbare Abbildung

$$f \colon M \to N$$

zwischen orientierbaren Mannigfaltigkeiten heisst orientierungs-erhaltend wenn ihr Differential positiv orientierte Basen in positiv orientierte Basen abbildet.

7.3.3. *Ableitung nach Vektorfeldern.* Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Kartenübergängen $\phi_i \phi_j^{-1}$. Dann ist der Tangentialraum TM eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Kartenübergängen $\phi_i \phi_j^{-1} \times D\phi_i D\phi_j^{-1}$.

Ein Vektorfeld ist eine differenzierbare Abbildung

$$X \colon M \to TM$$

mit $X(p) \in T_p M$ für alle $p \in M$.

Wir bezeichnen mit X_p den Wert des Vektorfeldes an der Stelle $p \in M$ und für eine differenzierbare Funktion $f \colon M \to \mathbb{R}$ mit fX das Vektorfeld, dessen Wert an einer Stelle p jeweils $f(p)X(p)$ ist. Die Richtungsableitung $X(f)$ in p ist definiert als

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}{t}$$

für eine beliebige Kurve γ mit $\gamma'(0) = X_p$. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Kurve und man kann sie in lokalen Koordinaten wie folgt beschreiben. Seien $(x_1, \ldots, x_n)$ lokale Koordinaten auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ (bzw. ihrem diffeomorphen Bild), dann ist das Vektorfeld von der Form

$$X = \sum_{i=1}^{n} v_i(x) e_i$$

und die Richtungsableitung berechnet sich als

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} v_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Aus diesem Grund bezeichnet man das Basisvektorfeld e_i auch als $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Es übertragen sich die Rechenregeln für partielle Ableitungen im $\mathbb{R}^n$, also

$$X(f+g) = X(f) + X(g), X(\lambda f) = \lambda X(f), X(fg) = fX(g) + gX(f)$$

für differenzierbare Funktionen f, g und reelle Zahlen λ, sowie die Kettenregel

$$(DF(X))f(F(x)) = X(f \circ F)(x)$$

für eine differenzierbare Abbildung $F \colon M \to N$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten.

7.3.4. *Fluß eines Vektorfeldes.* Aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen folgt: zu einem Vektorfeld $X \colon M \to TM$ auf einer *kompakten* Mannigfaltigkeit M gibt es einen Fluß

$$\Phi \colon \mathbb{R} \times M \to M,$$

so dass mit der Bezeichnung $\Phi_t(X) = \Phi(t, x)$ gilt:

$$\frac{d}{dt}|_{t=t_0} \Phi_t(x) = X(\Phi_{t_0}(x)) \ \forall x \in M, t_0 \in \mathbb{R}$$

$$\Phi_0 = Id, \Phi_{t+s} = \Phi_t \Phi_s \ \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Weil Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen glatt von den Anfangsbedingungen abhängen, ist $\Phi_t \colon M \to M$ differenzierbar. Wegen $\Phi_t \Phi_{-t} = Id$ ist Φ_t sogar ein Diffeomorphismus.

Umgekehrt kann man zu jeder 1-Parameter-Gruppe von Diffeomorphismen Φ_t das Vektorfeld

$$X(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \Phi_t(x)$$

betrachten, dessen Fluss dann gerade Φ_t ist.

7.3.5. *Derivationen und Kommutator von Vektorfeldern.* Für eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit dem Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen $C^\infty(M)$ bezeichnet man als Derivation eine lineare Abbildung

$$D \colon C^\infty(M) \to C^\infty(M),$$

die die Leibniz-Regel

$$D(fg) = fD(g) + gD(f)$$

für alle $f, g \in C^\infty(M)$ erfüllt.

Man prüft leicht nach, dass für Derivationen D_1, D_2 auch $D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ eine Derivation ist.

Die Richtungsableitung eines Vektorfeldes ist eine Derivation und man kann zeigen, dass jede Derivation die Richtungsableitung eines Vektorfeldes ist. Insbesondere gibt es ein Vektorfeld $[X, Y]$, das der Derivation $D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ entspricht.

Statt die Korrespondenz zwischen Derivationen und Vektorfeldern allgemein zu beweisen, werden wir im uns interessierenden Fall des Kommutators $[X, Y]$ eine explizite Formel angeben.

Definition 69. *Der Kommutator zweier Vektorfelder X, Y auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist das Vektorfeld, welches der Derivation*

$$f \to X(Y(f)) - Y(X(f))$$

entspricht.

In lokalen Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$ ist der Kommutator der Vektorfelder

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

gegeben durch

$$[X, Y] = \sum_{l=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} (X_k \frac{\partial Y_l}{\partial x_k} - Y_k \frac{\partial X_l}{\partial x_k})) \frac{\partial}{\partial x_l}.$$

Dies folgt durch eine einfache Rechnung, wobei man benutzt dass nach dem Schwarzschen Lemma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_l} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_i} = 0$$

ist und sich die Formel für den Kommutator deshalb zu

$$[X, Y] (f) = \sum_{i,j} X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial y_j} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial y_j}$$

vereinfacht.

Proposition 5. *Für einen Diffeomorphismus $F \colon M \to N$ und Vektorfelder X, Y auf M gilt*

$$[DF(X), DF(Y)] = DF([X, Y]).$$

Beweis: Durch wiederholte Anwendung der Kettenregel erhält man

$$DF(X)DF(Y)f(F(x)) = X(Y(f \circ F))(x)$$
$$DF(Y)DF(X)f(F(x)) = Y(X(f \circ F))(x)$$

und

$$DF([X, Y])f(F(x)) = [X, Y] (f \circ F)(x),$$

woraus die Behauptung folgt. *QED*

Aus den lokalen Formeln für den Kommutator ergeben sich die folgenden Rechenregeln für Vektorfelder X, Y, Z und $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$[X, Y] = - [Y, X]$$
$$[X + \lambda Y, Z] = [X, Z] + \lambda [Y, Z]$$
$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

7.4. Riemannsche Mannigfaltigkeiten und der Levi-Civita-Zusammenhang.

7.4.1. *Riemannsche Metriken.*

Definition 70. *Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M mit einer Riemannschen Metrik g, d.h. einem differenzierbar von $p \in M$ abhängenden Skalarprodukt*

$$g_p \colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

für alle $p \in M$.

Beispiel 70 *Riemannsche Metrik auf Untermannigfaltigkeiten*
Für eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit

$$M \subset \mathbb{R}^n$$

kann man

$$g_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle$$

für alle $X, Y \in T_pM \subset \mathbb{R}^n$ wählen.

7.4.2. *Levi-Civita-Zusammenhang.* Für eine Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ und Tangentialvektoren $X, Y \in T_pM$ liegt die Richtungsableitung D_XY im Allgemeinen nicht in T_pM. Wir können aber für jedes $p \in M$ die bzgl. des Skalarprodukts g_p orthogonale Projektion

$$P_p \colon \mathbb{R}^n \to T_pM$$

betrachten und durch

$$\nabla_X Y := P_p \circ D_X Y$$

einen "Zusammmenhang" definieren, der die folgenden Axiome i)-v) erfüllt.

Definition 71. *Ein Zusammenhang auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist eine Abbildung*

$$\nabla \colon X(TM) \times X(TM) \to X(TM),$$

die den folgenden Axiomen für alle Vektorfelder X, Y, Z und alle differenzierbaren Funktionen f, g genügt:

$$i) \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$ii) \nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$$

$$iii) \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y.$$

Hierbei bezeichnen wir mit $X(TM)$ den Vektorraum der Vektorfelder auf M und mit $X(f)$ die Richtungsableitung von f nach dem Vektorfeld X.

Definition 72. *Ein Zusammenhang auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) heisst Levi-Civita-Zusammenhang, wenn für alle Vektorfelder X, Y, Z gilt*

$$iv)\, [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

$$v) X(g(Y, Z)) = g(\nabla_x Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Lemma 82. *Auf jeder Riemannschen Mannigfaltigkeit gibt es einen eindeutigen Levi-Civita-Zusammenhang.*

Beweis: Aus den Axiomen i)-v) folgt die Koszul-Formel

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y])$$

für alle Vektorfelder X, Y, Z. Dadurch wird $\nabla_X Y$ eindeutig festgelegt. Insbesondere kann man $\nabla_X Y$ durch die Koszul-Formel definieren und prüft dann leicht nach, dass es allen Axiomen genügt. *QED*

Für eine gegebene Kurve γ mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = X(p)$ hängt $\nabla_X Y(p)$ nur von $X(p), Y(p)$ und den Ableitungen $\frac{dY_i(\gamma(t))}{dt}$ ab. Deshalb haben wir entlang einer Kurve γ ein wohldefiniertes Vektorfeld $\nabla_{\dot{\gamma}} Y$.

Definition 73. *Ein Vektorfeld Y heisst parallel entlang einer Kurve γ, wenn*

$$\nabla_{\dot{\gamma}} Y = 0$$

ist.

7.4.3. *Geodäten.*

Definition 74. *Eine Kurve* $\gamma\colon (a,b) \to M$ *in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit* M *ist eine Geodäte, wenn*

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma \equiv 0$$

ist.

Lemma 83. *i) Sei* (M,g) *eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gibt es zu jedem* $x \in M$ *und* $v \in T_xM$ *eine eindeutige Geodäte*

$$\gamma\colon (-\epsilon,\epsilon) \to M$$

mit

$$\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v.$$

ii) Wenn M *kompakt ist, dann kann jede Geodäte* γ *auf ganz* $\mathbb{R}$ *fortgesetzt werden. Insbesondere können wir eine Exponentialabbildung*

$$exp_x\colon T_xM \to M$$

durch

$$exp_x(v) = \gamma(1)$$

definieren.

Beweis: Aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen folgt die lokale Lösbarkeit der Geodätengleichung, aus der Kompaktheit von M dann die Fortsetzbarkeit auf ganz $\mathbb{R}$. *QED*

Definition 75. *Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit heißt geodätisch vollständig, wenn jede Geodäte* γ *auf ganz* $\mathbb{R}$ *fortgesetzt werden kann.*

Satz 20. (Satz von Hopf-Rinow) *In einer zusammenhängenden, geodätisch vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit, können je zwei Punkte durch eine Geodäte verbunden werden.*

Beweis: Einen Beweis findet man in *H. Hopf, W. Rinow: Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche. Comm. Math. Helv. 3, 209-225, 1931.* *QED*

In lokalen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ definiert man die Christoffel-Symbole des Zusammenhangs durch

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

sie lassen sich mit Hilfe der Koszul-Formel berechnen als

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{n} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right),$$

wobei g_{ij} den ij-Eintrag der Riemannschen Metrik g und g^{ij} den ij-Eintrag ihres Inversen bezeichnet. Mit diesen Symbolen nimmt die Geodäten-Gleichung $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$ die Form

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0$$

für $k = 1, \ldots, n$ an.

7.4.4. *Krümmungsbegriffe.*

Definition 76. *Der Riemannsche Krümmungstensor einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist der durch*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

definierte (3,1)-Tensor.

Lemma 84. *Der Riemannsche Krümmungstensor genügt den Bianchi-Identitäten*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$$

und

$$\nabla_W g(R(X,Y)Z, V) + \nabla_Z g(R(X,Y)V, W) + \nabla_V g(R(X,Y)W, Z) = 0$$

für alle Vektorfelder X, Y, Z, V, W.

Definition 77. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Krümmungstensor R. Die Schnittkrümmung einer 2-dimensionalen Ebene $E \subset T_pM$ für $p \in M$ ist definiert durch*

$$K(E) = g(R(X,Y)Y, X))$$

für eine Orthonnormalbasis X, Y von E.

Beispiel 71 *Räume konstanter Schnittkrümmung*

Für die runde Sphäre vom Radius 1 Beispiel 46 ist die Schnittkrümmung konstant 1. Für den euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ ist die Schnittkrümmung konstant 0. Für den hyperbolischen Raum aus Beispiel 47 ist die Schnittkrümmung konstant -1.

Anschauliche Bedeutung der Schnittkrümmung (Satz von Jacobi). Sei γ_s eine 1-Parameter-Familie von Geodäten durch p. Durch

$$H(s,t) := \gamma_s(t)$$

definieren wir eine differenzierbare Abbildung einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ in M mit $H(s, 0) = p$ für alle s. Wir definieren das Variationsvektorfeld auf dem Bild von γ_0 durch

$$Y(\gamma_0(t)) := \frac{\partial}{\partial s} H(0,t).$$

Dann gilt mit $A := \gamma_0'(t)$ die Jacobi-Gleichung

$$\nabla_A \nabla_A Y - \nabla_{\nabla_A A} Y + R(Y, A)A = 0$$

und insbesondere

$$g(Y'', Y) = -K(\gamma_0', Y).$$

Die Schnittkrümmung misst also, mit welcher Geschwindigkeit sich Geodäten auseinanderbewegen.

Insbesondere hat man für $K \equiv 1$

$$|Y(t)| = \sin t,$$

für $K \equiv 0$

$$|Y(t)| = t,$$

und für $K \equiv -1$

$$|Y(t)| = \sinh t.$$

Einen Beweis der Jacobi-Gleichung findet man in *Manfredo do Carmo: "Riemannian Geometry", Birkhäuser Basel 1992, ISBN 978-0-8176-3490-2.*

Beispiel 72 *Räume konstanter Schnittkrümmung*

Ein Satz von Cartan besagt, dass die einzigen einfach zusammenhängenden, geodätisch vollständigen, Riemannschen Mannigfaltigkeiten konstanter Schnittkrümmung die folgenden sind:

- die in den $\mathbb{R}^{n+1}$ eingebettete runde Sphäre vom Radius $\frac{1}{\sqrt{K}}$ mit Schnittkrümmung $K > 0$,
- der euklidische $\mathbb{R}^n$ mit Schnittkrümmung $K = 0$,
- die aus dem hyperbolische Raum in Beispiel 47 durch Multiplikation der Riemannschen Metrik mit einem Faktor $\frac{1}{K}$ erhaltene Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K < 0$.

Definition 78. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Krümmungstensor R. Die Ricci-Krümmung ist eine symmetrische Bilinearform auf $T_pM, p \in M$, die wir mit Hilfe einer Orthonormalbasis $e_1, \ldots, e_n$ von T_pM durch*

$$Ric(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, X)Y, e_i),$$

also als Spur der linearen Abbildung

$$Z \to R(Z, X)Y$$

definieren.

Definition 79. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Krümmungstensor R. Die Skalarkrümmung ist eine Funktion auf M, die in $p \in M$ durch*

$$Scal = \sum_{i=1}^{n} Ric(e_i, e_i)$$

für eine Orthonormalbasis $e_1, \ldots, e_n$ definiert ist.