Contents

1 Lie-Gruppen (topologisch)

1.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Definition 1 *: Sei X eine Menge. Eine Karte auf X ist eine offene Teilmenge $U \subset X$ mit einer Bijektion $\phi : U \to V$ auf eine offene Teilmenge $V := \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$.*

Die Punkte in U werden also eindeutig durch n reelle Parameter beschrieben. Man bezeichnet Karten häufig auch als lokale Koordinaten oder lokale Parametrisierungen.

Definition 2 *: Sei X eine Menge. Ein Atlas auf X ist eine Menge von Karten $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$, so dass $X = \cup_{i \in I} U_i$ und für alle $i, j \in I$*

$$\phi_i \phi_j^{-1} : \phi_j (U_i \cap U_j) \to \phi_i (U_i \cap U_j)$$

ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ist.

Hierbei heißt eine Abbildung f zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus, wenn f eine Bijektion ist und sowohl f als auch f^{-1} beliebig oft differenzierbar sind.

Beispiel 1 *: Sei X eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\{(X, id)\}$ ein Atlas.*

Beispiel 2 *: Sei $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ die durch $p(x) = [x]$ gegebene Abbildung (d.h. jedem Punkt wird seine Äquivalenzklasse zugeordnet. Sei $I = \{1, 2\}, U_1 = p(0, 1), U_2 = p\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Die Einschränkungen von p auf $(0, 1)$ bzw. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ sind injektiv, so dass wir auf U_1 bzw. U_2 Umkehrabbildungen zu p eindeutig definiert haben. Dann ist $\left\{\left(U_1, p^{-1}\right), \left(U_2, p^{-1}\right)\right\}$ ein Atlas. Es ist*

$$\phi_1 (U_1 \cap U_2) = \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right), \phi_2 (U_1 \cap U_2) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\phi_2 \phi_1^{-1}(x) = \left\{ \begin{array}{cc} x & x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ x - 1 & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right). \end{array} \right\}$$

Definition 3 *: Sei X eine Menge. Zwei Atlanten $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ und $\{(U_j, \phi_j)\}_{j \in J}$ heißen kompatibel, wenn die Vereinigung $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I \cup J}$ ein Atlas ist.*

Kompatibilität ist eine Äquivalenzrelation. Wir werden später sehen, dass die Analysis auf kompatiblen Atlanten im wesentlichen dieselbe ist. Deshalb sagen wir, dass kompatible Atlanten dieselbe Differentialstruktur bestimmen.

Definition 4 *: Eine Differentialstruktur auf einer Menge X ist eine Äquivalenzklasse von Atlanten.*

Definition 5 *: Eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist eine Menge X mit einer Differentialstruktur, wobei alle Karten Abbildungen auf offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind.*

Ein topologischer Raum ist eine Menge X mit einer Familie von Teilmengen, die als offene Mengen bezeichnet werden. (Man setzt voraus, dass beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte offener Mengen wieder offen sind, außerdem dass $\emptyset$ und X offene Mengen sind.) Eine Menge A heißt abgeschlossen, wenn $X - A$ offen ist (äquivalent: wenn aus $x_k \to x$ und $x_k \in A$ folgt $x \in A$).

Typisches Beispiel eines topologischen Raumes ist der $\mathbb{R}^n$ mit den üblichen offenen Mengen. Ein allgemeineres Beispiel ist ein beliebiger metrischer Raum, wobei eine Menge U offen heißt, wenn es zu jedem $x \in U$ eine in U enthaltene offene Kugel um x gibt.

Für eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M definieren wir eine Topologie wie folgt: eine Menge $V \subset M$ heißt offen, wenn für alle $i \in I$ gilt: $\phi_i(V \cap U_i)$ ist eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Mit dieser Definition wird M ein topologischer Raum.

Proposition 1 *: Für jedes $i \in I$ ist $\phi_i : U_i \to \phi_i(U_i)$ ein Homöomorphismus.*

Bemerkung: es ist in der Literatur üblich, noch folgende beiden Bedingungen an eine differenzierbare Mannigfaltigkeit zu stellen: die Topologie soll Hausdorffsch sein (d.h. zu je zwei Punkten findet man disjunkte offene Umgebungen) und es soll einen abzählbaren Atlas geben. Wir werden diese Voraussetzungen in dieser Vorlesung zwar nicht benutzen, sie werden aber jedenfalls in allen vorkommenden Beispielen erfüllt sein.

Definition 6 *: Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit differenzierbaren Atlanten $\{(U_i, \phi_i)\}$ bzw. $\{(V_j, \psi_j)\}$. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt differenzierbar, wenn für alle i, j die Abbildung $\psi_j^{-1} f \phi_i$ differenzierbar ist. Eine differenzierbare Abbildung f heißt Immersion bzw. Submersion in einem Punkt $p \in M$, wenn für alle i, j das Differential von $\psi_j^{-1} f \phi_i$ (in $\phi^{-1}(p)$) injektiv bzw. surjektiv ist.*

Aus der Differenzierbarkeit der Kartenübergänge $\phi_i \phi_j^{-1}$ bzw. $\psi_i \psi_j^{-1}$ folgt, dass es genügt, diese Bedingungen für jeden Punkt bzgl. jeweils einer Karte nachzuprüfen.
Wir bemerken noch, dass differenzierbare Abbildungen offensichtlich stetig sind (d.h., Urbilder offener Mengen sind offen).

Satz 1 *: Sei M eine differenzierbare $(n+m)$-Mannigfaltigkeit und $f : M \to \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung, die eine Submersion in allen Punkten von $f^{-1}(0)$ ist. Dann ist $f^{-1}(0)$ eine differenzierbare n-dimensionale Mannigfaltigkeit.*

Beweis: Es genügt die Behauptung, für offene Teilmengen $M = U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ zu beweisen.
Sei also $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ und $f(x_1, \ldots, x_{n+m}) = (f_1(x_1, \ldots, x_{n+m}), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_{n+m}))$.
Sei $a \in f^{-1}(0)$. Nach Voraussetzung hat Df_a Rang m. Nach Vertauschung der Koordinaten $x_1, \ldots, x_{n+m}$ können wir annehmen, dass die Matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leq i,j \leq m}$ invertierbar ist.
Wir betrachten nun $G : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m}$ definiert durch

$$G(x_1, \ldots, x_{n+m}) = (f(x_1, \ldots, x_{n+m}), x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}).$$

$DG_a = \begin{pmatrix} DF_a & * \\ 0 & I \end{pmatrix}$ ist invertierbar. Nach dem Satz über die Umkehrabbildung gibt es dann Umgebungen $U_a \subset \mathbb{R}^{n+m}$ von a und $V_{G(a)} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ von $G(a)$, so dass G :

$U_a \to V_{G(a)}$ ein Diffeomorphismus ist. Dieser Diffeomorphismus bildet $U_a \cap f^{-1}(0)$ nach $V_{G(a)} \cap (\{0\}^m \times \mathbb{R}^n)$ ab. Verknüpfung mit dem Diffeomorphismus $\{0\}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ liefert also einen Diffeomorphismus ϕ_a von $U_a \cap f^{-1}(0)$ auf eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.
Damit haben wir um jedes $a \in f^{-1}(0)$ eine Karte definiert. Wir müssen noch zeigen, dass die so definierten Karten kompatibel sind. Wenn $U_a \cap U_b \neq \emptyset$, dann ist für die wie oben definierten Diffeomorphismen G_a, G_b insbesondere die Einschränkung von $G_b G_a^{-1}$ auf $G_a(U_a \cap U_b)$ ein Diffeomorphismus, woraus die Kompatibilität leicht folgt. *QED*

Beispiel 3 *: $\mathbb{S}^n = f^{-1}(0)$ für die durch $f(x) = \| x \|^2 - 1$ definierte Abbildung $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. Es ist $Df_a = 2a \neq 0$ für $a \in \mathbb{S}^n$, also ist $\mathbb{S}^n$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.*

Definition 7 *: Eine Bijektion $f : M \to N$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist ein Diffeomorphismus, wenn f und f^{-1} differenzierbar sind.*

Wenn f ein Diffeomorphismus ist, muß es insbesondere Immersion und Submersion sein.

Tangentialvektoren. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $x \in M$. Ein (differenzierbares, parametrisiertes) Kurvenstück durch M ist eine differenzierbare Abbildung $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ mit $\epsilon > 0$ und $c(0) = x$. Zwei Kurvenstücke $c_1 : (-\epsilon_1, \epsilon_1) \to M$ und $c_2 : (-\epsilon_2, \epsilon_2) \to M$ heißen äquivalent, wenn es eine Karte $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ mit $x \in U$ gibt, so dass $(\phi \circ c_1)'(0) = (\phi \circ c_2)'(0)$ gilt. (Diese Eigenschaft ist unabhängig von der Wahl der Karte: sei $\phi_2 : U_2 \to V_2$ eine zweite Karte, dann ist $\phi_2 \circ c_i = \left(\phi_2 \phi^{-1}\right) \phi \circ c_i$ for $i = 1, 2$, insbesondere folgt aus $(\phi \circ c_1)'(0) = (\phi \circ c_2)'(0)$ auch $(\phi_2 \circ c_1)'(0) = D\left(\phi_2 \phi^{-1}\right)(\phi \circ c_1)'(0) = D\left(\phi_2 \phi^{-1}\right)(\phi \circ c_2)'(0) = (\phi \circ c_2)'(0)$.)
Dies definiert eine Äquivalenzrelation und wir definieren den Tangentialraum $T_x M$ an M in x als die Menge der Äquivalenzklassen. Die Äquivalenzklassen von Kurvenstückchen werden als Tangentialvektoren bezeichnet.
Für $M = \mathbb{R}^n$ erhält man $T_x M = \mathbb{R}^n$ vermittels der Bijektion $[c] \to c'(0)$. (Injektivität folgt aus der Definition der Äquivalenzrelation, Surjektivität erhält man, in dem man zu $v \in \mathbb{R}^n$ z.B. die Kurve $c(t) = x + tv$ betrachtet.)
Für allgemeines $x \in M$ mit einer Karte $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ erhalten wir analog, nach Definition von $T_x M$, eine Bijektion zwischen $T_x M$ und $T_{\phi(x)} \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$. Wir können diese Bijektion benutzen, um auf $T_x M$ Addition und Skalarmultiplikation zu definieren. Diese Vektorraum-Operationen hängen *nicht* von der gewählten Karte (U, ϕ) ab, weil für jede andere Karte (U_2, ϕ_2) die Abbildung $D\left(\phi_2 \phi^{-1}\right)$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist.
Der Tangentialraum TM von M ist

$$TM = \cup_{x \in M} T_x M.$$

Er ist ein sogenanntes Vektorraumbündel, d.h. jedes $T_x M$ ist ein Vektorraum, und die Vektorraumoperationen hängen differenzierbar von M ab.
Kürzer, aber weniger anschaulich, lassen sich die bisher gemachten Definitionen wie folgt zusammenfassen.

Definition 8 *:*
a) Für eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir $TV = V \times \mathbb{R}^n = \cup_{x \in V} \{x\} \times \mathbb{R}^n$

mit den Vektorraum-Operationen $(x, v_1) + (x, v_2) = (x, v_1 + v_2)$ *und* $\lambda(x, v) = (x, \lambda v)$ *für* $\lambda \in \mathbb{R}$.
b) Für eine Mannigfaltigkeit M *mit Atlas* $\{(U_i, \phi)\}_{i \in I}$ *definieren wir* TM *als*

$$TM = \cup_{i \in I} (U_i \times \mathbb{R}^n) / \sim$$

mit

$$(x, v) \sim \left(x, D\left(\phi_i \phi_j^{-1}\right) v\right)$$

für alle $x \in U_i \cap U_j$. *Für* $x \in M$ *heißt die Menge aller* $[(x, v)]$ *der* **Tangentialraum** $T_x M$ *in* x. *Die Vektorraumoperationen sind definiert durch* $[(x, v_1)] + [(x, v_2)] = [(x, v_1 + v_2)]$ *und* $\lambda[(x, v)] = [(x, \lambda v)]$ *für* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definition 9 *: Sei* $f : M \to N$ *eine differenzierbare Abbildung. Seien* $\{(U_i, \phi_i)\}$ *und* $\{(V_j, \psi_j)\}$ *differenzierbare Atlanten für* M *bzw.* N. *Dann definieren wir das Differential* $Df : TM \to TN$ *wie folgt.*

Sei $x \in U_i \subset M$ *und* $f(x) \in V_j \subset N$. *Sei* $[(x, v)] \in TM$. *Dann definieren wir* $Df[(x, v)] = \left[\left(f(x), D\left(\psi_j f \phi_i^{-1}\right)(v)\right)\right] \in T_{f(x)} N$.

Aus der Definition von $\sim$ folgt, dass dies wohldefiniert (unabhängig von der Wahl von ϕ_i und ψ_j) ist.
Wir bezeichnen die Einschränkung von Df auf $\{x\} \times \mathbb{R}^n / \sim$ mit Df_x. Für $M = \mathbb{R}^n, N = \mathbb{R}^k$ erhält man die übliche Definition von Df_x.

Proposition 2 *: Für differenzierbare Abbildungen* $f : M_1 \to M_2, g : M_2 \to M_3$ *und* $x \in M_1$ *gilt:* $D(g \circ f)_x = Dg_{f(x)} \circ Df_x, D(id)_x = id$.

Für eine Teilmenge $P \subset N$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit N definieren wir die Teilraumtopologie wie folgt: eine Menge in P sei offen gdw. sie der Durchschnitt von P mit einer in N offenen Menge ist.
Ein Homöomorphismus ist eine Bijektion f, so dass f und f^{-1} stetig sind.

Definition 10 *: Seien* M, N *differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine differenzierbare Abbildung* $e : M \to N$ *heißt Einbettung, wenn sie ein Homöomorphismus von* M *auf* $e(M)$ *(mit der Teilraumtopologie) ist und für alle* $x \in M$ *das Differential* $De_x : T_x M \to T_{e(x)} N$ *injektiv ist.*

Definition 11 *: Sei* N *eine differenzierbare* n*-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge* $M \subset N$ *ist eine* m*-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn sie das Bild einer Einbettung ist, äquivalent: wenn es einen Atlas von* N *gibt, so dass man zu jedem* $x \in M$ *eine Karte* $\phi : U \to N$ *mit* $\phi(U \cap \mathbb{R}^m) = \phi(U) \cap M$ *hat.*

Bemerkung: Nach einem Satz von Whitney gilt: wenn eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M^n Hausdorff ist und einen abzählbaren Atlas besitzt, dann gibt es eine Einbettung $e : M^n \to \mathbb{R}^{2n}$. (Hierbei bezeichnet der Superscript n die Dimension von M.)

Übungsaufgaben 1 *:*
1. Seien M *und* N *differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Atlanten* $\{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$ *für* M *bzw.* $\{(V_j, \psi_j) : j \in J\}$ *für* N.
Sei $M \times N = \{(x, y) : x \in M, y \in N\}$. *Zeigen Sie, dass* $\{(U_i \times V_j, \phi_i \times \psi_j) : i \in I, j \in J\}$ *eine differenzierbare Struktur auf* $M \times N$ *definiert.*
(Für $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^m$ *und* $\psi_j : V_j \to \mathbb{R}^n$ *ist* $\phi_i \times \psi_j : U_i \times V_j \to \mathbb{R}^{m+n}$ *definiert durch* $\phi_i \times \psi_j (x, y) = (\phi_i (x), \psi_j (y))$.
2. Sei $Mat(n, \mathbb{R})$ *die Menge der reellen* $n \times n$*-Matrizen und* $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in Mat(n, \mathbb{R}) : det(A) \neq 0\}$. *Geben Sie eine differenzierbare Struktur (d.h. einen Atlas) an, mit dem* $GL(n, \mathbb{R})$ *eine* n^2*-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.*
3. Zeigen Sie, dass es auf der Menge $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 = y^2\right\}$ *keinen differenzierbaren Atlas geben kann.*
4. Sei $\mathbb{S}^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \| x \| = 1\right\}$. *Zeigen Sie, dass* $\mathbb{S}^n$ *mit* $\{(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)\}$ *mit*

$$U_1 = \{x \in \mathbb{S}^n : x_{n+1} \neq -1\}, U_2 = \{x \in \mathbb{S}^n : x_{n+1} \neq 1\},$$

$$\phi_1 (x_1, \ldots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}}\right), \phi_2 (x_1, \ldots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}\right)$$

eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.
5. Zeigen Sie, dass die folgenden Atlanten auf $\mathbb{S}^1$ *kompatibel sind:*
- der Atlas für $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *(Beispiel 2),*
- der durch stereographische Projektion gegebene Atlas (Aufgabe 4),
- der Atlas als Nullstellenmenge von $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ *(Satz 1).*
6. Sei $f : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ *eine Submersion und* $M = f^{-1}(0)$ *mit der differenzierbaren Struktur aus Satz 1. Zeigen Sie:* $TM = \{(x, v) : x \in M, D_x f(v) = 0\}$.
7. Zeigen Sie: $T\mathbb{S}^n = \left\{(x, v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} : \| x \| = 1, < x, v >= 0\right\}$.

1.2 Lie-Gruppen

Definition 12 *: Eine Lie-Gruppe ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit* G*, die eine Gruppe ist, so daß die Gruppenmultiplikation* $G \times G \to G$ *und die Inversion* $G \to G$ *differenzierbare Abbildungen sind. Ein Morphismus* $f : G \to H$ *ist eine differenzierbare Abbildung, die ein Gruppenhomomorphismus ist. Ein Isomorphismus von Lie-Gruppen ist ein Morphismus* f*, zu dem es einen inversen Morphismus* f^{-1} *gibt.*

Beispiel 4 *: Für* $g \in G$ *bezeichne* $l_g : G \to G$ *die Linksmultiplikation* $l_g (h) = gh$. l_g *ist kein Homomorphismus, aber ein Diffeomorphismus von* G *mit Inversem* $l_{g^{-1}}$.
Analog ist die durch $r_g (h) = hg$ *definierte Rechtsmultiplikation* $r_g : G \to G$ *ein Diffeomorphismus.*

Wir bezeichnen mit $Mat(n, \mathbb{R})$ die Menge der $n \times n$-Matrizen mit reellen Einträgen. $Mat(n, \mathbb{R})$ ist keine Gruppe, weil es nicht-invertierbare Elemente gibt. Es ist jedoch eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, wenn man es mit $\mathbb{R}^{n^2}$ identifiziert. Wir werden im folgenden für alle Teilmengen von $Mat(n, \mathbb{R})$ die Unterraumtopologie in $\mathbb{R}^{n^2}$ betrachten. (Mit anderen Worten: für eine Folge von Matrizen A_n gilt $A_n \to A$ genau dann, wenn alle Einträge gegen die Einträge von A konvergieren.)

Beispiel 5 *:* $GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in Mat(n,\mathbb{R}) : det(A) \neq 0\}$ *ist eine Lie-Gruppe.*

Beweis: $GL(n,\mathbb{R})$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n^2}$. Als differenzierbaren Atlas kann man also wählen $\{(U_1, \phi_1)\}$ mit $U_1 = GL(n,\mathbb{R})$ und $\phi_1(x) = x$ für alle x. $GL(n,\mathbb{R})$ ist offensichtlich abgeschlossen bzgl. Matrixmultiplikation und Inversion. Wir müssen noch zeigen, dass Multiplikation und Inversion differenzierbar sind.

Die Multiplikation ist differenzierbar, weil jeder Eintrag von AB ein Polynom in den Einträgen von A und den Einträgen von B ist. Die Inversion ist differenzierbar, weil nach der Cramer'schen Regel jeder Eintrag von A^{-1} (bis auf Vorzeichen) ein Quotient aus der Determinante einer Untermatrix und der Determinante von A, die beide Polynome in Einträgen von A sind, ist. QED

Weil $GL(n,\mathbb{R})$ eine offene Teilmenge von $Mat(n,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ ist, können wir natürlich für jedes $A \in GL(n,\mathbb{R})$ den Tangentialraum $T_A GL(n,\mathbb{R})$ mit $Mat(n,\mathbb{R})$ identifizieren. Dabei wird das Element $B \in Mat(n,\mathbb{R})$ zum Beispiel von der Kurve $A + tB$ durch A in $GL(n,\mathbb{R})$ repräsentiert. (Wegen der Stetigkeit der Determinante gilt $det(A+tB) \neq 0$ für hinreichend kleine $|\, t\,|$.)
Wenn, für ein $g \in GL(n,\mathbb{R})$, l_g die Linksmultiplikation aus Beispiel 4 ist, erhält man

$$(Dl_g)_A(B) = \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\,(g(A+tB)) = gB$$

und analog für die Rechtsmultiplikation: $(Dr_g)_A(B) = Bg$.

Definition 13 *: Eine Lie-Gruppe G heißt Matrix-Gruppe oder klassische Lie-Gruppe, wenn sie isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von $GL(n,\mathbb{R})$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist.*

Bemerkung: Man kann zeigen, dass jede abgeschlossene Untergruppe von $GL(n,\mathbb{R})$ eine Untermannigfaltigkeit, und damit eine Lie-Gruppe, ist. (Die Differenzierbarkeit von Multiplikation und Inversion ist klar, weil Einschränkungen differenzierbarer Abbildungen auf Untermannigfaltigkeiten offensichtlich differenzierbar sind.) Anstatt dies allgemein zu beweisen, werden wir es in diesem Abschnitt direkt für die uns interessierenden Beispiele zeigen.

Beispiel 6 *:* $GL(n,\mathbb{C}) = \{A \in Mat(n,\mathbb{C}) : det(A) \neq 0\}$ *ist eine Lie-Gruppe und eine abgeschlossene Untergruppe von $GL(n,\mathbb{R})$.*

Beweis: Der Beweis der ersten Behauptung ist natürlich völlig analog zum Beweis für $GL(n,\mathbb{R})$, die Bilder der Karten liegen jetzt in $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$.

Wir wollen nun zeigen, dass man $GL(n,\mathbb{C})$ als reelle Matrix-Gruppe auffassen kann. Wir identifizieren $\mathbb{C}^n$ mit $\mathbb{R}^{2n}$ indem wir $(x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n)$ mit $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ identifizieren. Sei A eine komplexe Matrix mit Einträgen a_{ij}, $1 \leq i,j \leq n$. Sei $a_{ij} = r_{ij}(\cos\phi_{ij} + i\sin\phi_{ij})$ mit $r_{ij} \geq 0, 0 \leq \phi_{ij} < 2\pi$. Unter der Identifizierung entspricht A der Abbildung $A : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, die durch eine $2n \times 2n$-Matrix mit n^2 2×2-Blöcken mit Einträgen $\begin{pmatrix} r_{ij}\cos\phi_{ij} & -r_{ij}\sin\phi_{ij} \\ r_{ij}\sin\phi_{ij} & r_{ij}\cos\phi_{ij} \end{pmatrix}$ beschrieben wird.

Wir wollen noch eine andere Beschreibung für $GL(n,\mathbb{C})$ als Untergruppe von $GL(2n,\mathbb{R})$ geben. Nach der ersten Beschreibung entspricht insbesondere die Multiplikation mit i, die Multiplikation mit der Diagonalmatrix $diag\,(i,\ldots,i)\in GL\,(n,\mathbb{C})$, dann der Multiplikation mit der Blockmatrix

$$J=\begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & \\ & & & \cdot & & & & \\ & & & & \cdot & & & \\ & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}\in GL\,(2n,\mathbb{R})\,.$$

Nun ist aber eine Abbildung A genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn sie $\mathbb{R}$-linear ist und $A\,(iv)=iA\,(v)$ für alle Vektoren v gilt. Dies heißt:

$$GL\,(n,\mathbb{C})=\{A\in GL\,(2n,\mathbb{R}):AJ=JA\}\,.$$

QED

Insbesondere ist also eine Lie-Gruppe isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von $GL\,(n,\mathbb{C})$ für ein $n\in\mathbb{N}$ genau dann, wenn sie isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von $GL\,(n,\mathbb{R})$ für ein $n\in\mathbb{N}$ ist.

Beispiel 7 *:*
a) $SL\,(n,\mathbb{R})=\{A\in Mat\,(n,\mathbb{R}):det\,(A)=1\}$ *und* $SL\,(n,\mathbb{C})=\{A\in Mat\,(n,\mathbb{C}):det\,(A)=1\}$ *sind Lie-Gruppen.*
b) Es ist $T_ASL\,(n,\mathbb{R})=\left\{C\in Mat\,(n,\mathbb{R}):Tr\left(A^{-1}C\right)=0\right\},T_ASL\,(n,\mathbb{C})=\left\{C\in Mat\,(n,\mathbb{C}):Tr\left(A^{-1}C\right)=0\right\}.$

Beweis: Wir betrachten $f:GL\,(n,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$f\,(A)=det\,(A)-1.$$

Dann ist $SL\,(n,\mathbb{R})=f^{-1}\,(0)$. Um Satz 1 anwenden zu können, müssen wir zeigen, daß f eine Submersion ist.

Dafür betrachten wir, für festes $B\in GL\,(n,\mathbb{R})$, Elemente der Form $A_t=diag\,(1+t,1,1,\ldots,1)\,B$. Für $t>-1$ gehört A_t zu $GL\,(n,\mathbb{R})$ und es gilt $f\,(A_t)=t\det\,(B)$. Insbesondere ist $\frac{d}{dt}f\,(A_t)=det\,(B)=1\neq 0$, was in diesem Fall (wegen $dim\,(\mathbb{R})=1$) die Surjektivität von Df in B bereits zeigt.

Außerdem ist $SL\,(n,\mathbb{R})$ abgeschlossen bzgl. Matrixmultiplikation und Inversion, und diese sind wieder differenzierbar, weil sie die Einschränkung der entsprechenden differenzierbaren Abbildungen von $GL\,(n,\mathbb{R})$ auf die Untermannigfaltigkeit $SL\,(n,\mathbb{R})$ sind.

Der Beweis für $SL\,(n,\mathbb{C})$ ist völlig analog.
Zum Beweis von b) genügt es (wegen der Bemerkung nach Beispiel 5), die Behauptung für $A=\mathbb{I}$ zu beweisen. Wir müssen also $ker\,(Df_{\mathbb{I}})$ bestimmen.

Sei e_{ij} die Matrix, die an der Stelle (i,j) den Eintrag 1 und sonst alle Einträge 0 hat. Dann ist

$$Df_{\mathbb{I}}\,(e_{ij})=\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\,f\,(\mathbb{I}+te_{ij})=\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\,det\,(\mathbb{I}+te_{ij})-1=\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\,tdet\,(\mathbb{I}_{ij})=det\,(\mathbb{I}_{ij})$$

wobei $\mathbb{I}_{ij}$ die Matrix bezeichnet, die man aus $\mathbb{I}$ durch Entfernen der i-ten Zeile und j-ten Spalte erhält. Offensichtlich gilt $det(\mathbb{I}_{ij}) = \delta_{ij}$.

Für eine Matrix $B \in Mat(n, \mathbb{R})$ folgt dann

$$Df_{\mathbb{I}}(B) = \sum_{i,j} b_{ij} Df_{\mathbb{I}}(e_{ij}) = \sum_{i,j} b_{ij}\delta_{ij} = \sum_i b_{ii} = Tr(B).$$

Also ist $T_{\mathbb{I}}SL(n, \mathbb{R}) = \{B \in Mat(n, \mathbb{R}) : Tr(B) = 0\}$. Der Beweis für $SL(n, \mathbb{C})$ ist völlig analog. *QED*

Beispiel 8 *:*
a) $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : AA^T = \mathbb{I}\}, SO(n) = \{A \in SL(n, \mathbb{R}) : AA^T = \mathbb{I}\}, U(n) = \left\{A \in GL(n, \mathbb{C}) : A\overline{A}^T = \mathbb{I}\right\}, SU(n) = \left\{A \in SL(n, \mathbb{C}) : A\overline{A}^T = \mathbb{I}\right\}$ *sind Lie-Gruppen.*
b) Es ist $T_{\mathbb{I}}O(n) = \{B \in Mat(n, \mathbb{R}) : B + B^T = 0\}$,
$T_{\mathbb{I}}SO(n) = \{B \in Mat(n, \mathbb{R}) : B + B^T = 0, Tr(B) = 0\}, T_{\mathbb{I}}U(n) = \left\{B \in Mat(n, \mathbb{C}) : B + \overline{B}^T = 0\right\}$,
$T_{\mathbb{I}}SU(n) = \left\{B \in Mat(n, \mathbb{R}) : B + \overline{B}^T = 0, Tr(B) = 0\right\}$.

Beweis: Wir führen die Beweise für $O(n)$ und $SO(n)$, die anderen Fälle sind dann ähnlich (aber nicht völlog analog).
Beweis für $O(n)$. Wir definieren $f : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ durch $f(A) = \left(\left(AA^T\right)_{ij} - \delta_{ij}\right)_{1 \le i \le j \le n}$.
Dann ist $O(n) = f^{-1}(0)$, denn wegen $\left(AA^T\right)^T = AA^T$ folgt aus $\left(AA^T\right)_{ij} = \delta_{ij}$ automatisch auch $\left(AA^T\right)_{ji} = \delta_{ji}$.

Wir müssen zeigen, dass Df_B in jedem Punkt $B \in GL(n, \mathbb{R})$ Rang $\frac{n(n+1)}{2}$ hat (d.h. surjektiv ist). Sei e_{ij} mit $1 \le i \le j \le n$ ein Standardbasisvektor von $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Wir zeigen, dass e_{ij} im Bild von Df_B liegt.
Durch Differenzieren von f erhält man $Df_B(H) = HB^T + BH^T$. Wir betrachten die Matrix K, deren Einträge an den Stellen (i,j) und (j,i) jeweils $\frac{1}{2}$ sind und die sonstige Einträge Null hat. (Im Fall $i = j$ ist also nur ein Eintrag $\frac{1}{2}$.) Damit ist dann

$$Df_B(KB) = KBB^T + BB^TK^T = K + K^T = e_{ij},$$

also liegt e_{ij} im Bild von Df_B. Dies zeigt, dass f eine Submersion ist, also ist $f^{-1}(0)$ eine Untermannigfaltigkeit. Weil $O(n)$ abgeschlossen unter Multiplikation und Inversion ist, ist es eine Lie-Gruppe. Die Formel für den Tangentialraum folgt aus $Df_{\mathbb{I}}(H) = H + H^T$.
Beweis für $SO(n)$. Wir definieren $f : SL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}-1}$ durch

$$f(A) = \left(\left(\left(AA^T\right)_{ij}\right)_{1 \le i < j \le n}, \left(\left(AA^T\right)_{ii} - 1\right)_{1 \le i \le n-1}\right).$$

Wenn $f(A) = 0$, dann muß AA^T eine Diagonalmatrix sein, und die ersten $n-1$ Diagonaleinträge müssen gleich 1 sein. Wegen $det\left(AA^T\right) = det(A)^2 = 1$ folgt daraus aber, dass alle Diagonaleinträge 1 sein müssen. Damit ist also tatsächlich $SO(n) = f^{-1}(0)$.

Analog zu oben erhält man

$$Df_B(KB) = \left(\left((K+K^T)_{ij} \right)_{1 \leq i < j \leq n}, \left((K+K^T)_{ii} \right)_{1 \leq i \leq n-1} \right).$$

Wir zeigen nun, dass Df_B in jedem Punkt $B \in SL(n, \mathbb{R})$ surjektiv ist. Für e_{ij} mit $i < j$ erhalten wir mit demselben K wie oben $Df_B(KB) = e_{ij}$. (Man beachte, dass in diesem Fall nach Konstruktion $Tr(K) = 0$ gilt, also ist tatsächlich $KB \in T_B SL(n, \mathbb{R})$.) Für $i = j \leq n-1$ betrachten wir $K = \frac{1}{2}(e_{ii} - e_{nn})$. Dann ist $Tr(K) = 0$ und $Df_B(KB) = e_{ii}$.

Wir erwähnen der Vollständigkeit halber noch, welche Abbildungen man in den anderen beiden Fällen betrachtet. $U(n)$ erhält man als Nullstellenmenge der Abbildung $f(A) = \left(\left\{ Re\left(A\overline{A}^T\right)_{ij}, \right\}_{1 \leq i < j \leq n}, \left\{ Im\left(A\overline{A}^T\right)_{ij}, \right\}_{1 \leq i < j \leq n}, \left\{ \left(A\overline{A}^T\right)_{ii} - 1 \right\}_{1 \leq i \leq n} \right) \in \mathbb{R}^{n^2}$ und $SU(n)$ als Nullstellenmenge der Abbildung $f : SL(n, \mathbb{C}) \to \mathbb{R}^{n^2-1}$
$f(A) = \left(\left\{ Re\left(A\overline{A}^T\right)_{ij}, \right\}_{1 \leq i < j \leq n}, \left\{ Im\left(A\overline{A}^T\right)_{ij}, \right\}_{1 \leq i < j \leq n}, \left\{ \left(A\overline{A}^T\right)_{ii} - 1 \right\}_{1 \leq i \leq n-1} \right)$
(man benutzt, dass die Diagonaleinträge von $A\overline{A}^T$ alle reell sind). Die Beweise sind dann ähnlich wie oben. QED

Wir bemerken noch, dass die Inklusion $GL(n, \mathbb{C}) \subset GL(2n, \mathbb{R})$ die unitäre Gruppe $U(n)$ zu einer Untergruppe der orthogonalen Gruppe $O(2n)$ und $SU(n)$ zu einer Untergruppe von $O(2n)$ macht. (Zum Beispiel ist $U(1)$ isomorph zu $SO(2)$.)

Ähnlich definiert man auch

$$O(n,1) = \left\{ A \in GL(n, \mathbb{R}) : A \, diag(1, \ldots, 1, -1) A^T = diag(1, \ldots, 1, -1) \right\}$$

und

$$U(n,1) = \left\{ A \in GL(n, \mathbb{C}) : A \, diag(1, \ldots, 1, -1) \overline{A}^T = diag(1, \ldots, 1, -1) \right\}.$$

$O(3,1)$ ist die Lorentzgruppe. $O(n,1)$ ist die Isometriegruppe des n-dimensionalen hyperbolischen Raumes.

Man kann zeigen, dass alle abgeschlossenen Untergruppen von Lie-Gruppen wieder Lie-Gruppen sind. Die Abgeschlossenheit ist tatsächlich notwendig, damit man eine Lie-Gruppe bekommt. Dies zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 9 *: Untergruppen des Torus.*
Sei $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \left\{ \left(e^{2\pi i \alpha_1}, e^{2\pi i \alpha_2}\right) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}$ *der Torus und* $\theta \in \mathbb{R}$ *eine reelle Zahl. Wir betrachten die Untergruppe* $H := \left\{ \left(e^{2\pi i \alpha_1}, e^{2\pi i \alpha_2}\right) : \alpha_2 = \theta \alpha_1 \right\}$.

Wenn θ *eine rationale Zahl ist, dann ist* H *abgeschlossen und damit eine Lie-Gruppe. (*H *ist dann diffeomorph zu* $\mathbb{S}^1$*.) Wenn* θ *eine irrationale Zahl ist, dann ist* H *nicht abgeschlossen (es gilt dann* $\overline{H} = \mathbb{T}^2$*). Als Gruppe ist* H *dann isomorph zu* $\mathbb{R}$*. Es ist jedoch nicht homöomorph zu* $\mathbb{R}$*, weil man nach Durchlaufzeiten von Vielfachen von* 2π *wieder beliebig dicht an den Ausgangspunkt herankommen kann.*

Übungsaufgaben 2 *:*
1. $\mathbb{S}^1$ *mit dem Atlas aus Beispiel 2 ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.* $\mathbb{S}^1$ *als Menge der komplexen Zahlen vom Betrag 1 ist eine Gruppe. Zeigen Sie, dass Gruppenmultiplikation und Inversion differenzierbare Abbildungen sind.*
2. Seien G *und* H *Lie-Gruppen. Zeigen Sie, dass* $G \times H$ *mit der Multiplikation* $(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$ *eine Lie-Gruppe ist.*
3. Zeigen Sie: Eine Matrix $A \in Gl(n, \mathbb{R})$ *(bzw.* $A \in Gl(n, \mathbb{C})$*) gehört zu* $O(n)$ *(bzw. zu* $U(n)$*) genau dann, wenn für die Spaltenvektoren* $v_1, \ldots, v_n$ *von* A *gilt:* $< v_i, v_j >= \delta_{ij}$*.*
4. a) Zeigen Sie: $A \in SO(2) \Leftrightarrow$ *es gibt* $\phi \in \mathbb{R}$ *mit* $A = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$
$A \in SU(2) \Leftrightarrow$ *es gibt* $z, w \in \mathbb{C}$ *mit* $\mid z \mid^2 + \mid w \mid^2$*, so dass* $A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$.
b) Zeigen Sie, dass $SO(2)$ *homöomorph zu* $\mathbb{S}^1$ *und* $SU(2)$ *homöomorph zu* $\mathbb{S}^3$ *ist.*
5. Zeigen Sie: zu jedem $A \in GL(n, \mathbb{R})$ *gibt es eine Folge* A_k *von diagonalisierbaren Matrizen mit* $\lim_{k\to\infty} A_k = A$*. Insbesondere ist die Gruppe der diagonalisierbaren Matrizen keine abgeschlossene Untergruppe von* $GL(n, \mathbb{R})$*.*

1.3 Topologie klassischer Lie-Gruppen

Definition 14 *: Ein topologischer Raum* M *heißt:*
- kompakt, wenn jede offene Überdeckung von M *eine endliche Teilüberdeckung besitzt,*
- zusammenhängend, wenn es keine Zerlegung $M = U \cup V$ *in zwei disjunkte offene Mengen gibt,*
- wegzusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in M$ *eine stetige Abbildung* $w : [0,1] \to M$ *mit* $w(0) = x, w(1) = y$ *gibt.*

Bekanntlich ist eine Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ (z.B. eine Matrixgruppe) kompakt genau dann, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Satz 2 *:* $O(n), SO(n), U(n), SU(n)$ *sind kompakt.* $GL(n, \mathbb{R}), GL(n, \mathbb{C}), SL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{C})$ *sind nicht kompakt.*

Beweis: $GL(n, \mathbb{R}), GL(n, \mathbb{C})$ sind nicht abgeschlossen. $SL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{C})$ sind zwar abgeschlossen, aber nicht beschränkt: zum Beispiel ist die Folge der Diagonalmatrizen $\left(n, 1, \ldots, 1, \frac{1}{n}\right)$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine unbeschränkte Folge in $SL(n, \mathbb{R})$ oder $SL(n, \mathbb{C})$. $O(n), SO(n), U(n), SU(n)$ sind abgeschlossen, weil sie als Lösungsmengen von Gleichungen gegeben sind. Wenn eine Matrix in $O(n)$ ist, dann haben ihre Spalten Norm 1 und stehen senkrecht aufeinander, die gesamte Matrix (als Element in $\mathbb{R}^{n^2}$) hat also Norm $\sqrt{n}$. Alle Matrizen in $O(n)$ haben also dieselbe Norm, insbesondere ist $O(n)$ beschränkt. Genauso zeigt man die Beschränktheit von $SO(n), U(n), SU(n)$. *QED*

Satz 3 *:* $GL(n, \mathbb{R})$ *und* $O(n)$ *sind nicht wegzusammenhängend,*
$SO(n), U(n), SU(n), GL(n, \mathbb{C}), SL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{C})$ *sind wegzusammenhängend.*

Beweis: Angenommen, es gibt in $GL(n, \mathbb{R})$ einen stetigen Weg w mit $w(0) = \mathbb{I}$ und $w(1) = diag(-1, 1, 1, \ldots, 1)$. Weil die Determinante stetig von der Matrix abhängt, ist dann $det\,(w\,(t))$ in $\mathbb{R}$ ein stetiger Weg von 1 nach -1. Nach dem Zwischenwertsatz muß es also ein $t \in (0,1)$ mit $det\,(w\,(t)) = 0$ geben. Damit ist dann aber $w\,(t) \notin GL\,(n, \mathbb{R})$. Genauso zeigt man, dass $O\,(n)$ nicht wegzusammenhängend ist.

Wir zeigen jetzt, dass $GL\,(n, \mathbb{C})$ wegzusammenhängend ist. Dafür genügt es, zu jeder Matrix $A \in GL\,(n, \mathbb{C})$ einen Weg w von $\mathbb{I}$ nach A anzugeben. (Wenn dann nämlich $B, C \in GL\,(n, \mathbb{C})$ beliebig sind, betrachtet man einen Weg w von $\mathbb{I}$ nach $B^{-1}C$ und erhält mit Bw einen Weg von B nach C.)
Sei zunächst A eine Diagonalmatrix: $A = diag\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Sei $\lambda_k = r_k e^{i\phi_k}, k = 1, \ldots, n$, mit $r_k, \phi_k \in \mathbb{R}_+$. Wegen $det\,(A) \neq 0$ haben wir $r_k \neq 0$ für $k = 1, \ldots, n$. Dann definieren wir

$$w\,(t) = diag\left((1 - t + tr_1)\, e^{it\phi_1}, \ldots, (1 - t + tr_n)\, e^{it\phi_n}\right).$$

Dies ist ein stetiger Weg von $\mathbb{I}$ nach A und es gilt $1 - t + tr_k > 1 - t > 0$, also $\mid det\,(w\,(t)) \mid = \Pi_{k=1}^n \mid 1 - t + tr_k \mid > 0$, d.h. $w\,(t) \in GL\,(n, \mathbb{C})$.
Wenn es einen stetigen Weg $w\,(t)$ von $\mathbb{I}$ nach A gibt, dann ist $B^{-1}w\,(t)\,B$ ein stetiger Weg von $\mathbb{I}$ nach $B^{-1}AB$. Insbesondere finden wir also zu allen diagonalisierbaren Matrizen einen Weg, der sie mit $\mathbb{I}$ verbindet. Weiterhin genügt es, nach dem Jordan-Theorem, für alle Jordan-Blockmatrizen A einen Weg von $\mathbb{I}$ nach A anzugeben.
Sei also A eine Blockmatrix mit Diagonaleinträgen $r_k e^{i\phi_k}$ und sonstigen Einträgen 0 und 1. Dann habe $w\,(t)$ die Diagonaleinträge $(1 - t + tr_1)\, e^{it\phi_k}$ und sonstige Einträge t bzw. 0, wenn der entsprechende Eintrag von A 0 bzw. 1 ist. Wir haben dann wieder $\mid det\,(w\,(t)) \mid = \Pi_{k=1}^n \mid 1 - t + tr_k \mid > 0$, d.h. $w\,(t) \in GL\,(n, \mathbb{C})$.

Fast derselbe Beweis zeigt, daß $SL\,(n, \mathbb{C})$ wegzusammenhängend ist. Wir ändern lediglich die Definition des letzten Diagonaleintrages: dieser soll jetzt das Inverse des Produktes der ersten $n-1$ Diagonaleinträge sein, für alle $w\,(t)$.

Der Beweis für $SO\,(n)$ geht durch vollständige Induktion. Für $n = 2$ wissen wir bereits $SO\,(2) \simeq \mathbb{S}^1$. Sei nun der Wegzusammenhang von $SO\,(n-1)$ schon bewiesen. Sei $A \in SO\,(n)$. Wenn $A = CBC^{-1}$ mit $B \in SO\,(n-1) \subset SO\,(n)$ ist, dann können wir A mit $\mathbb{I}$ verbinden. Es bleibt zu zeigen, dass jedes A als Produkt solcher Elemente darstellbar ist.

Wenn Ae_n ein Vielfaches von e_n ist, dann muss wegen der Orthonormalität $Ae_n = \pm e_n$ sein. Falls $Ae_n = e_n$, dann folgt aus der Orthogonalität der Spaltenvektoren, dass $A \in SO\,(n-1)$ sein muss. Falls $Ae_n = -e_n$, dann betrachten wir $B = Adiag\,(1, \ldots, 1, -1, -1)$. Wegen $Be_n = e_n$ ist $B \in SO\,(n-1)$. Ausserdem gibt es einen Weg von $diag\,(1, \ldots, 1, -1, -1)$ nach $\mathbb{I}$ (nämlich den entsprechenden Weg in $SO\,(2)$). Also gibt es einen Weg von A nach $\mathbb{I}$.

Nach Gram-Schmidt gibt es ein $B_1 \in SO\,(n)$, welches die Ebene durch (e_n, Ae_n) in die Ebene durch (e_1, e_2) abbildet. Wir können (nach Multiplikation mit einem Element aus $SO\,(2) \subset SO\,(n)$) $B_1 e_n = e_1$ annehmen. Weiter gibt es ein $B_2 \in SO\,(2)$, dass e_1 nach $B_1 Ae_n$ abbildet. Sei $B_3 := B_1^{-1} B_2^{-1} B_1 A$. Dann ist $B_3\,(e_n) = e_n$, also $B_3 \in SO\,(n-1)$. Wegen $A = B_1^{-1} B_2 B_1 B_3$ folgt die Behauptung.

Analog zeigt man, dass $U\,(n)$ und $SU\,(n)$ wegzusammenhängend sind.

Schliesslich bemerken wir noch, dass der Weg-Zusammenhang von $SL(n,\mathbb{R})$ aus dem Weg-Zusammenhang von $SO(n)$ folgt. Jede Matrix aus $SL(n,\mathbb{R})$ lässt sich als Produkt AB mit $A \in SO(n)$ und B positiv definit darstellen (Polarzerlegung). Wenn B positiv definit ist, dann ist auch $tB + (1-t)\mathbb{I}$ positiv definit, für $t \in [0,1]$. Insbesondere lässt sich B, durch Matrizen mit positiver Determinante, stetig in $\mathbb{I}$ deformieren, woraus die Behauptung folgt. QED

$SU(2)$ **und** $SO(3)$

$SU(2)$ und $SO(3)$ sind die einfachsten *nichtabelschen* Lie-Gruppen. Zusammen mit der abelschen Gruppe $SO(2) \simeq U(1)$ sind sie zweifellos die in Topologie und theoretischer Physik am häufigsten vorkommenden Lie-Gruppen. Deshalb wollen wir ihnen einen eigenen Abschnitt widmen.

Proposition 3 *: Es gibt einen surjektiven Homomorphismus* $\Phi : SU(2) \to SO(3)$ *mit* $\ker(\Phi) = \{\mathbb{I}, -\mathbb{I}\}$.

Beweis: Wir geben zunächst einen Überblick über den Beweis. (In dem Beweis werden einige später in der Vorlesung allgemein zu definierende Begriffe schon einmal am Beispiel der $SU(2)$ eingeführt.) Sei

$$su(2) = \left\{A \in Mat(2,\mathbb{C}) : A + \overline{A}^T = 0, Tr(A) = 0\right\}$$

die sogenannte Lie-Algebra zu $SU(2)$. Jedes $C \in SU(2)$ wirkt auf $su(2)$ durch $A \to CAC^{-1}$, dies nennt man die adjungierte Wirkung. Die sogenannte Killingform auf $su(2)$ ist definiert durch

$$< A, B >= 4Tr\left(A\overline{B}^T\right).$$

Dies ist ein Skalarprodukt und wird, für jedes $C \in SU(2)$, von $Ad(C)$ invariant gelassen. Wenn wir also mit Gram-Schmidt eine ON-Basis des 3-dimensionalen Vektorraumes $su(2)$ bzgl. $< .,. >$ wählen, dann ist $Ad(C) \in SO(3)$. Wir definieren dann $\Phi = Ad : SU(2) \to SO(3)$ und zeigen, dass Φ surjektiv mit Kern $\{\mathbb{I}, -\mathbb{I}\}$ ist.

Der Beweis im Detail: Wir betrachten $su(2)$ mit $< A, B >= 4Tr\left(A\overline{B}^T\right)$. Wir prüfen zunächst nach, dass dies ein Skalarprodukt ist. Bilinearität ist klar und Symmetrie folgt aus $Tr\left(A\overline{B}^T\right) = Tr\left(\left(A\overline{B}^T\right)^T\right) = \overline{Tr\left(B\overline{A}^T\right)}$. Zur positiven Definitheit: für $A \neq 0$ ist $A\overline{A}^T$ ist positiv definit weil für $x \notin ker\left(\overline{A}^T\right)$ gilt: $< A\overline{A}^T x, x >=< \overline{A}^T x, \overline{A}^T x >> 0$. Insbesondere sind die Eigenwerte von $A\overline{A}^T$ nichtnegativ und, für $A \neq 0$, ist mindestens ein Eigenwert positiv. Daraus folgt $Tr\left(A\overline{A}^T\right) > 0$.

Als nächstes müssen wir nachprüfen, dass für $A \in su(2)$ und $C \in SU(2)$ tatsächlich $Ad(C)A := CAC^{-1} \in SU(2)$ gilt. Es ist $Tr\left(CAC^{-1}\right) = Tr(A) = 0$ und (wegen $\overline{C}^T = C^{-1}$)

$$CAC^{-1} + \overline{CAC^{-1}}^T = CAC^{-1} + \left(\overline{C}^T\right)^{-1}\overline{A}^T\overline{C}^T$$

$$= CAC^{-1} + C\overline{A}^T C^{-1} = C\left(AC^{-1} + \overline{A}^T C^{-1}\right) = C\left(A + \overline{A}^T\right) C^{-1} = C0C^{-1} = 0,$$

also $CAC^{-1} \in SU(2)$.

Wir zeigen jetzt dass, für jedes $C \in SU(2)$, $< .,. >$ von $Ad(C)$ invariant gelassen wird, d.h. dass

$$< Ad(C)A, Ad(C)B >=< A, B >$$

für alle $A, B \in su(2)$ gilt. Tatsächlich ist

$$< Ad(C)A, Ad(C)B >= 4Tr\left(CAC^{-1}\overline{CBC^{-1}}^T\right) = 4Tr\left(CAC^{-1}\overline{C}^{-1}\overline{B}^T\overline{C}^T\right)$$

$$= 4Tr\left(CA\mathbb{I}\overline{B}^T C^{-1}\right) = 4Tr\left(A\overline{B}^T\right) =< A, B > .$$

Wenn wir mit Gram-Schmidt eine ON-Basis wählen, erhalten wir also einen Isomorphismus $su(2) \to \mathbb{R}^3$, der dieses Skalarprodukt in das Standard-Skalarprodukt überführt. Weil $Ad(C)$ dieses Skalarprodukt erhält, sind bezüglich der gewählten Basis die Zeilenvektoren von $ad(C)$ orthonormal. Es ist also $ad(C) \in O(3)$. Weil $SU(2)$ zusammenhängend und $ad(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$ ist, muß das Bild in der Zusammenhangskomponente von $\mathbb{I}$ liegen, also $ad(C) \in SO(3)$.

Wir definieren nun $\Phi = Ad : SU(2) \to SO(3)$, was offensichtlich ein Homomorphismus ist.

Sei $C \in ker(\Phi)$. Dann kommutiert C mit allen Matrizen aus $su(2)$. Es muss dann auch mit allen komplexen Vielfachen von Matrizen aus $su(2)$ kommutieren. Letztere sind aber *alle* Matrizen mit Spur Null. (Jede Matrix A läßt sich mittels $A = \frac{1}{2}\left(A + \overline{A}^T\right) + \frac{1}{2}\left(A - \overline{A}^T\right)$ als Summe hermitescher und schiefhermitescher Matrizen zerlegen. Hermitesche Matrizen sind rein-imaginäre Vielfache von schiefhermiteschen Matrizen.) Also muss A eine Diagonalmatrix mit zwei gleichen Einträgen sein. (Dies sieht man z.B., wenn man $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ betrachtet.) Wegen $det(A) = 1$ folgt $A = \pm\mathbb{I}$.

Weil die Einschränkung von Φ auf eine Umgebung eines Punktes injektiv ist, muss $D\Phi$ ein Isomorphismus sein (denn aus dem impliziten Funktionen-Theorem folgt bekanntlich: wenn für eine differenzierbare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ der Rang des Differentials $rk(D\phi_x) = k$, dann gibt es Umgebungen von x bzw. $\phi(x)$ mit lokalen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ bzw. $y_1, \ldots, y_m$ in denen $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ ist, lokale Injektivität ist also im Fall $n = m$ nur möglich für $k = n$), Φ ist also ein lokaler Diffeomorphismus (nach dem Satz über die Umkehrabbildung). Insbesondere ist sein Bild offen.

Weil $SU(2)$ kompakt ist, muss das Bild von Φ aber auch kompakt, insbesondere abgeschlossen sein. Weil $SO(3)$ zusammenhängend und das Bild nicht leer ist, folgt daraus $im(\Phi) = SO(3)$, also Surjektivität.

QED

Bemerkung (für Hörer mit Topologie-Kenntnissen): Der Homomorphismus $Ad : SU(2) \to SO(3)$ ist eine zweifache Überlagerung. Weil $SU(2)$ diffeomorph zur 3-Sphäre $\mathbb{S}^3$ ist, folgt

daraus, dass $SO(3)$ diffeomorph zum projektiven Raum $\mathbb{R}P^3$ ist.
Allgemein gilt für alle $n \geq 3$: $\pi_1 SO(n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Die eindeutige zusammenhängende 2-fache Überlagerung von $SO(n)$ wird als Spingruppe $Spin(n)$ bezeichnet. Insbesondere ist also $Spin(3)$ isomorph zu $SU(2)$.

Übungsaufgaben 3 *: 1. Zeigen Sie: eine Mannigfaltigkeit ist genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist.*
2. Zeigen Sie, dass die Lorentz-Gruppe $O(3,1)$ nicht kompakt ist.

1.4 Exponential von Matrizen

Proposition 4 *: Sei $A \in Mat(n, \mathbb{C})$ eine Matrix. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$.*

Beweis: Wir betrachten eine beliebige Norm auf der Menge der Matrizen, z.B. $\| A \| = sup\{ | \lambda | : \lambda \in \mathbb{C} \text{ Eigenwert von } A\}$. Dann ist $\sum_{n=0}^{k} \| \frac{1}{n!} A^n \| \leq \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} \| A \|^n = e^{\| A \|}$. Daraus folgt, dass die Partialsummen $\sum_{n=0}^{k} \| \frac{1}{n!} A^n \|$ eine Cauchyfolge bilden, also konvergieren. Aus absoluter Konvergenz folgt Konvergenz von Reihen, also Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$. *QED*

Wir bezeichnen

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

Beispiel 10 *: Sei $A = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix. Dann ist $e^A = diag\left(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}\right)$ ebenfalls eine Diagonalmatrix.*

Beispiel 11 *: Sei A diagonalisierbar, d.h. $A = CDC^{-1}$ für eine Diagonalmatrix $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ und eine invertierbare Matrix C. Dann ist $e^A = Ce^D C^{-1}$ mit $e^D = diag\left(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}\right)$.*

Lemma 1 *: Für $A \in Mat(n, \mathbb{C})$ ist $\frac{d}{dt} |_{t=0} e^{tA} = A$.*

Beweis: Bekanntlich kann man Potenzreihen (in ihrem Konvergenzkreis) gliedweise differenzieren. Dies wendet man auf die einzelnen Komponenten von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} t^n$ an. *QED*

Proposition 5 *: Die Abbildung $exp : Mat(n, \mathbb{C}) \to GL(n, \mathbb{C})$ ist ein lokaler Diffeomorphismus, d.h. ein Diffeomorphismus einer Umgebung von 0 auf eine Umgebung von $\mathbb{I}$.*

Beweis: Man prüft leicht nach, dass $D(exp)_0 = id$ ist. *QED*

Lemma 2 *: $det\left(e^A\right) = e^{Tr(A)}$.*

Beweis: Wenn die Behauptung für eine Matrix A gilt, dann gilt sie auch für jede konjugierte Matrix CAC^{-1} mit $GL(n, \mathbb{C})$. Es genügt also, die Behauptung für Jordan-Blockmatrizen nachzuprüfen.

Sei A eine Blockmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Dann ist $e^{Tr(A)} = e^{\lambda_1} \ldots e^{\lambda_k}$. Für jede Potenz A^n gilt: unterhalb der Diagonale stehen Nullen, auf der Diagonale stehen $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_k^n$. Damit gilt auch für e^A: unterhalb der Diagonale stehen Nullen, auf der Diagonale stehen $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_k}$. Die Determinante einer solchen oberen Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonaleinträge, woraus die Behauptung folgt. *QED*

Lemma 3 *: Wenn $AB = BA$, dann $e^{A+B} = e^A e^B$. Insbesondere ist e^A invertierbar und es gilt $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$.*

Beweis: Wegen $AB = BA$ können wir die binomische Formel auf Potenzen von $A + B$ anwenden und erhalten insbesondere

$$\| \sum_{n=0}^{2m} \frac{1}{n!} (A+B)^n - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{l!} B^l \| = \| \sum_{k+l=2m, k>m \ oder \ l>m} \frac{A^k}{k!} \frac{B^l}{l!} \| \leq \sum_{k+l=2m, k>m \ oder \ l>m} \frac{\| A \|^k}{k!} \frac{\| B \|^l}{l!}.$$

Weil $\sum_{k=m+1}^{2m} \frac{\|A\|^k}{k!}$ und $\sum_{l=m+1}^{2m} \frac{\|B\|^l}{l!}$ Nullfolgen sind, ist auch $\sum_{k+l=2m, k>m \ oder \ l>m} \frac{\|A\|^k}{k!} \frac{\|B\|^l}{l!}$ eine Nullfolge, woraus die Behauptung folgt. *QED*

Lemma 4 *: $e^{A+B} = \lim_{m\to\infty} \left(e^{\frac{A}{m}} e^{\frac{B}{m}}\right)^m$ für alle $A, B \in Mat(n, \mathbb{C})$.*

Beweis: Für alle $A \in Mat(n, \mathbb{C})$ mit $\| A - \mathbb{I} \| < 1$ definieren wir

$$log(A) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{m} (A - \mathbb{I})^m .$$

(Falls A eine 1×1-Matrix ist, ist dies der übliche Logarithmus.) Zur Konvergenz: die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} \| (-1)^{m+1} \frac{1}{m} (A - \mathbb{I})^m \| = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \| (A - \mathbb{I})^m \|$ wird majorisiert von $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \| (A - \mathbb{I}) \|^m$, und diese Reihe konvergiert für $\| A - \mathbb{I} \| < 1$, nach der Quotientenregel. Also konvergiert $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{m} (A - \mathbb{I})^m$ absolut.

Wir zeigen jetzt $e^{\log A} = A$. Dies ist klar, wenn $A = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix ist, denn dann ist $log(A) = diag(\log \lambda_1, \ldots, \log \lambda_n)$. Für eine diagonalisierbare Matrix $A = C\ diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) C^{-1}$ hat man $log(A) = C\ diag(\log \lambda_1, \ldots, \log \lambda_n) C^{-1}$, woraus mit Beispiel 11 ebenfalls die Behauptung folgt. Schließlich gibt es für eine beliebige Matrix A eine Folge A_k diagonalisierbarer Matrizen mit $\lim_{k\to\infty} A_k = A$, woraus $e^{\log(A)} = e^{\lim_{k\to\infty} \log A_k} = \lim_{k\to\infty} e^{\log(A_k)} = \lim_{k\to\infty} A_k = A$ folgt.

Zum Beweis des Lemmas. Wir multiplizieren die Reihen für $e^{\frac{A}{m}}$ und $e^{\frac{B}{m}}$ und erhalten

$$e^{\frac{A}{m}} e^{\frac{B}{m}} = Id + \frac{A}{m} + \frac{B}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right).$$

Für alle Matrizen M mit $\| M \| < 1$ gilt offensichtlich $log(\mathbb{I} + M) = M + O\left(\| M \|^2\right)$. Wenn wir m hinreichend groß wählen ist $\| \frac{A}{m} + \frac{B}{m} \| < 1$. Also ist

$$\log\left(e^{\frac{A}{m}} e^{\frac{B}{m}}\right) = \log\left(Id + \frac{A}{m} + \frac{B}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right) = \frac{A}{m} + \frac{B}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right).$$

Damit hat man
$$e^{\frac{A}{m}}e^{\frac{B}{m}} = e^{\frac{A}{m}+\frac{B}{m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right)},$$
woraus die Behauptung folgt.

QED

Übungsaufgaben 4 *:*

1. a) Berechnen Sie das Exponential von $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Sei $t \in \mathbb{R}$. *Berechnen Sie das Exponential von* $\begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}$.

c) Sei $t \in \mathbb{R}$. *Berechnen Sie das Exponential von* $\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$.

1.5 Lie-Algebra von Matrix-Gruppen

Aus Lemma 2 oder Lemma 3 folgt, daß für alle Matrizen $A \in Mat(n, \mathbb{C})$ gilt: $e^A \in GL(n, \mathbb{C})$.

Definition 15 *: Sei* $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ *eine Matrix-Gruppe. Die Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$ *von* G *ist*
$$\mathfrak{g} := \left\{ A \in Mat(n, \mathbb{C}) : e^{tA} \in G \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Beispiel 12 *: Für* $G = SL(n, \mathbb{C})$ *ist* $\mathfrak{g} = \{A \in Mat(n, \mathbb{C}) : Tr(A) = 0\}$.

Beweis: : Aus $Tr(A) = 0$ erhält man mit Proposition 2: $det\left(e^{tA}\right) = e^{tTr(A)} = 1$, also $e^{tA} \in SL(n, \mathbb{C})$.
Umgekehrt, sei $e^{tA} \in SL(n, \mathbb{C})$, dann folgt $e^{Tr(tA)} = 1$, also ist $Tr(tA)$ ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$. Weil dies für alle $t \in \mathbb{R}$ der Fall sein muß, folgt daraus aber $Tr(A) = 0$.
QED

Analog erhält man: für $G = SL(n, \mathbb{R})$ ist $\mathfrak{g} = \{A \in Mat(n, \mathbb{R}) : Tr(A) = 0\}$.

Beispiel 13 *: Für* $G = U(n)$ *ist* $\mathfrak{g} = \left\{A \in Mat(n, \mathbb{C}) : A + \overline{A}^T = 0\right\}$.

Beweis: : Aus $A + \overline{A}^T = 0$ folgt nach Lemma 3, weil $\overline{A}^T = -A$ mit A vertauscht, dass $e^{tA}\overline{e^{tA}}^T = e^{t\left(A+\overline{A}^T\right)} = e^0 = \mathbb{I}$.
Umgekehrt sei $e^{tA} \in U(n)$, dann ist $\mathbb{I} = e^{tA}\overline{e^{tA}}^T$, d.h. $\overline{e^{tA}}^T = \left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}$ für alle t.
Ableiten in $t = 0$ gibt $\overline{A}^T = -A$. QED

Analog erhält man: für $G = O(n)$ ist $\mathfrak{g} = \left\{A \in Mat(n, \mathbb{R}) : A + A^T = 0\right\}$.

Definition 16 *: Sei* $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ *eine Matrix-Gruppe. Eine Untergruppe* $H \subset G$ *heißt 1-Parameter-Gruppe, wenn sie das Bild eines differenzierbaren Homomorphismus* $\Theta : \mathbb{R} \to G$ *ist.*

Zu jedem $A \in \mathfrak{g}$ ist das Bild des Homomorphismus $\Theta(t) = e^{tA}$ eine 1-Parameter-Gruppe in G. Wir bezeichnen sie mit Γ_A.

Lemma 5 *: Die Abbildung $F : A \to \Gamma_A$ ist eine Bijektion zwischen $\mathfrak{g}$ und 1-Parameter-Gruppen von G.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass eine 1-Parameter-Gruppe $\Theta : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{C})$ durch $\frac{d}{dt}|_{t=0}\ \Theta(t)$ bereits eindeutig festgelegt ist. Sei also $\Theta : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{C})$ eine 1-Parameter-Gruppe mit $\Theta'(0) = A$. Sei $s \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\Theta(s+t) = \Theta(t)\Theta(s)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, woraus $\Theta'(s) = \Theta'(0)\Theta(s) = A\Theta(s)$ folgt. Nach dem Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen ist dann $\Theta(t) = e^{tA}$ die einzige Lösung von $\Theta'(s) = A\Theta(s), \Theta(0) = \mathbb{I}$.

Daraus folgt offensichtlich, dass zu einer 1-Parameter-Gruppe Γ, die Bild eines Homomorphismus $\Theta : \mathbb{R} \to G \subset GL(n, \mathbb{C})$ ist, $A := \frac{d}{dt}|_{t=0}\ \Theta(t) \in \mathfrak{g}$ ist (denn für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $e^{tA} = \Theta(t) \in G$).

Durch $E(\Theta) := \frac{d}{dt}|_{t=0}\ \Theta(t)$ erhalten wir also eine Abbildung $E : \{$1-Parameter-Gruppen in $G\} \to \mathfrak{g}$ mit $FE = id$. Aus Lemma 1 folgt, dass $EF = id$. *QED*

Definition 17 *: Ein Vektorraum V mit einer bilinearen Verknüpfung $[.,.] : V \times V \to V$ heißt (abstrakte) Lie-Algebra, wenn gilt:*
(i) $[X,Y] = -[Y,X]$ für alle $X, Y \in V$,
(ii) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ für alle $X, Y, Z \in V$.
Ein Lie-Algebren-Homomorphismus $\phi : V \to W$ ist eine lineare Abbildung mit $\phi([X,Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$ für alle $X, Y \in V$.

Bedingung (ii) heißt die Jacobi-Identität.

Definition 18 (Kommutator von Matrizen)*: Für $A, B \in Mat(n, \mathbb{R})$ definieren wir $[A,B] = AB - BA$.*

Proposition 6 *: Sei G eine Matrix-Gruppe. Dann ist ihre Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mit dem Kommutator $[.,.]$ eine abstrakte Lie-Algebra.*

Beweis: : Man rechnet leicht nach, daß der Kommutator bilinear ist und die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt. Wir müssen noch zeigen, daß aus $A, B \in \mathfrak{g}$ auch $A + B \in \mathfrak{g}, tA \in \mathfrak{g}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und $[A,B] \in \mathfrak{g}$ folgt.

Die Implikation $A \in \mathfrak{g} \Longrightarrow tA \in \mathfrak{g}$ ist trivial. Weil G eine Gruppe ist, ist dann insbesondere mit $e^{\frac{A}{m}}$ und $e^{\frac{B}{m}}$ auch $\left(e^{\frac{A}{m}}e^{\frac{B}{m}}\right)^m \in G$, woraus mit Lemma 4 und der Abgeschlossenheit von G auch $e^{A+B} = \lim_{m\to\infty}\left(e^{\frac{A}{m}}e^{\frac{B}{m}}\right)^m \in G$ folgt.

Schließlich folgt $[A,B] \in \mathfrak{g}$ aus $e^{tA}Be^{-tA} \in \mathfrak{g}$ und $[A,B] = \frac{d}{dt}|_{t=0}\ \left(e^{tA}Be^{-tA}\right)$. ($e^{tA}Be^{-tA} \in \mathfrak{g}$ gilt weil für alle $s \in \mathbb{R}$ das Exponential $e^{s\left(e^{tA}Be^{-tA}\right)} = e^{tA}e^{sB}e^{-tA} \in G$ ist.) *QED*

Wir werden in Kapitel 2 Lie-Algebren für beliebige Lie-Gruppen definieren.

Wir bemerken noch, dass man durch Angabe einer Vektorraum-Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ mit den Kommutatoren $[e_i, e_j] = \sum c_{ij}^k e_k$ eine Lie-Algebra angeben kann, wenn $c_{ij}^k = -c_{ji}^k$

und die Jacobi-Identität $\sum_m \left(c_{ij}^m c_{mk}^l + c_{jk}^m c_{mi}^l + c_{ki}^m c_{mj}^l \right) = 0$ gelten muss. Die c_{ij}^k heissen Strukturkonstanten der Lie-Algebra und sie bestimmen die Lie-Algebra eindeutig bis auf Isomorphie. (Sie hängen natürlich von der gewählten Basis ab.)

Beispiel 14 *: Eine Basis von $sl(2,\mathbb{R})$ ist gegeben durch* $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Es ist* $[e_1, e_2] = 2e_2, [e_1, e_3] = -2e_3, [e_2, e_3] = e_1$, *also* $c_{12}^2 = -c_{21}^2 = 2, c_{13}^3 = -c_{31}^3 = -2, c_{23}^1 = -c_{32}^1 = 1$ *und* $c_{ij}^k = 0$ *sonst.*

Definition 19 *: Sei $\Phi : G \rightarrow H$ ein Homomorphismus von Matrix-Gruppen. Sein Differential $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ ist definiert durch $\phi(X) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \Phi\left(e^{tX}\right)$.*

Wir werden später sehen, dass tatsächlich $\phi = D\Phi_{\mathbb{I}}$ ist.

Lemma 6 *: Sei $\Phi : G \rightarrow H$ ein Homomorphismus von Matrix-Gruppen. Dann ist $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren und es gilt $\Phi\left(e^X\right) = e^{\phi(X)}$ für alle $X \in \mathfrak{g}$.*

Beweis: $\Phi\left(e^{tX}\right)$ ist eine 1-Parametergruppe mit $\frac{d}{dt}|_{t=0} \Phi\left(e^{tX}\right) = \phi(X)$. Aus Lemma 5 folgt, dass sie mit der 1-Parameter-Gruppe $e^{t\phi(X)}$ übereinstimmen. Für $t = 1$ erhält man insbesondere $\Phi\left(e^X\right) = e^{\phi(X)}$.

Analog, weil die 1-Parametergruppen $e^{ts\phi(X)}$ und $e^{t\phi(sX)}$ beide mit $\Phi\left(e^{tsX}\right)$ übereinstimmen und deshalb dieselbe Ableitung in 0 haben, folgt $s\phi(X) = \phi(sX)$ für $s \in \mathbb{R}$.

Die Gleichung $\phi(X+Y) = \phi(X) + \phi(Y)$ folgt aus der Rechnung

$$e^{t\phi(X+Y)} = e^{\phi(tX+tY)} = \Phi\left(e^{tX+tY}\right) = \Phi\left(\lim_{m\rightarrow\infty}\left(e^{\frac{tX}{m}} e^{\frac{tY}{m}}\right)^m\right)$$

$$= \lim_{m\rightarrow\infty} \Phi\left(\left(e^{\frac{tX}{m}} e^{\frac{tY}{m}}\right)^m\right) = \lim_{m\rightarrow\infty}\left(\Phi\left(e^{\frac{tX}{m}}\right)\Phi\left(e^{\frac{tY}{m}}\right)\right)^m$$

$$= \lim_{m\rightarrow\infty}\left(e^{\frac{t\phi(X)}{m}} e^{\frac{t\phi(Y)}{m}}\right)^m = e^{t(\phi(X)+\phi(Y))}$$

und Ableiten nach t in $t = 0$.

Zum Beweis, dass ϕ ein Lie-Algebren-Homomorphismus ist, bemerken wir zunächst, dass aus

$$e^{t\phi\left(AXA^{-1}\right)} = \Phi\left(e^{tAXA^{-1}}\right) = \Phi\left(Ae^{tX}A^{-1}\right) = \Phi(A)\, e^{t\phi(X)}\Phi(A)^{-1}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ die folgende Gleichung für $A \in G, X \in \mathfrak{g}$ folgt:

$$\phi\left(AXA^{-1}\right) = \Phi(A)\,\phi(X)\,\Phi(A)^{-1}.$$

Weiterhin wissen wir (aus dem Beweis von Proposition 6), dass nach der Produktregel

$$[X,Y] = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, e^{tX} Y e^{-tX}.$$

Damit erhalten wir (weil ϕ linear ist)

$$\phi([X,Y]) = \phi\left(\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\, e^{tX} Y e^{-tX}\right) = \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\, \phi\left(e^{tX} Y e^{-tX}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\, \Phi\left(e^{tX}\right) \phi(Y)\, \Phi\left(e^{-tX}\right) = \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\, e^{t\phi(X)} \phi(Y)\, e^{-t\phi(X)} = [\phi(X), \phi(Y)].$$

QED

Übungsaufgaben 5 *: 1. Bestimmen Sie das Bild der Exponentialabbildung für $G = SL(2,\mathbb{R})$.*
2. Zeigen Sie, dass für $G = SO(n)$ die Exponentialabbildung surjektiv ist.
3. Bestimmen Sie eine Vektorraum-Basis und die dazugehörigen Strukturkonstanten für die Lie-Algebra $su(2)$.
4. Zeigen Sie, dass die Lie-Algebren $su(2)$ und $so(3)$ isomorph sind.

2 Lie-Gruppen (analytisch)

2.1 Vektorfelder

Tangentialraum als differenzierbare Mannigfaltigkeit. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wir haben also einen Atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ mit Karten $\phi_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^n$, so dass $M = \cup_{i\in I} U_i$ und so dass die Kartenwechsel $\phi_i \phi_j^{-1}$ differenzierbar sind. Für jede offene Teilmenge $V_i \subset \mathbb{R}^n$ ist $TV_i = V_i \times \mathbb{R}^n$. Insbesondere kann man $\phi_i^{-1} \times id$ benutzen, um $U_i \times \mathbb{R}^n$ mit dem Tangentialraum an U_i zu identifizieren. Wir benutzen dies, um einen differenzierbaren Atlas $\{(TU_i, \psi_i)\}$ auf TM wie folgt zu definieren: wir setzen $TU_i = \{(x,v) \in TM : x \in U_i\}$ und $\psi_i(x,v) = (\phi_i(x), v)$. Die Kartenwechsel sind dann gegeben durch $\left(\phi_i\phi_j^{-1}, D\left(\phi_i\phi_j^{-1}\right)\right)$. TM ist also eine $2n$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Definition 20 *: Ein* **Vektorfeld** *ist eine differenzierbare Abbildung $X : M \to TM$ mit $X(p) \in T_pM$ für alle $p \in M$.*

Die Menge aller Vektorfelder bildet offensichtlich einen $\mathbb{R}$-Vektorraum, den wir mit $Vect(M)$ bezeichnen. Wir bezeichnen häufig mit X_p den Wert des Vektorfeldes X an der Stelle $p \in M$ und, für eine differenzierbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit fX das durch $(fX)_p := f(p) X_p$ definierte Vektorfeld.

Proposition 7 *: Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Karten $\phi_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^n$. Seien $X^i : V_i \to V_i \times \mathbb{R}^n$ Vektorfelder auf V_i. Dann gibt es genau dann ein Vektorfeld $X : M \to TM$ mit $D\phi_i(X) = X^i$ für alle $i \in I$ wenn gilt:*

$$D\left(\phi_i\phi_j^{-1}\right) X^j(x) = X^i\left(\phi_i\phi_j^{-1} x\right) \quad \forall i,j \in I, x \in V_j.$$

In der Physik bezeichnet man Vektorfelder als $(1,0)$-Tensoren.

Auf offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ betrachten wir das Vektorfeld $X \equiv e_i$ für $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Man bezeichnet dieses Vektorfeld als $\frac{\partial}{\partial x_i}$. (Wir werden noch sehen, dass die Ableitung nach X tatsächlich die i-te partielle Ableitung ist.) Offensichtlich ist jedes auf offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ definierte Vektorfeld von der Form $a_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x) \frac{\partial}{\partial x_n}$ mit differenzierbaren Funktionen $a_1, \ldots, a_n$. (Vektorfelder auf dem $\mathbb{R}^n$ entsprechen also n-Tupeln differenzierbarer Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$.)

Allgemeiner, haben wir zu jeder Karte $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ einer Mannigfaltigkeit M, dass sich in dieser Karte jedes Vektorfeld X als $X\mid_U = \sum_{l=1}^n a_l(x) D\phi^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right)$ darstellen läßt. Wir werden häufig sagen, dass X bezüglich der durch $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ gegebenen lokalen Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$ als $X = \sum_{l=1}^n a_l(x) \frac{\partial}{\partial x_l}$ gegeben ist. Bezüglich anderer, durch $\psi_j : U_j \to \mathbb{R}^n$ gegebener, Koordinaten $(y_1, \ldots, y_n)$ muß dann (auf $U_i \cap U_j$) das Differential $D\left(\phi_i \phi_j^{-1}\right)$ die Darstellung bzgl. der y-Koordinaten in die Darstellung bzgl. der x-Koordinaten überführen.

Beispiel 15 *: Auf $\mathbb{S}^1$ mit dem Atlas aus Beispiel 2 bezeichnen wir $\frac{\partial}{\partial \theta} = D\phi_i^{-1} \frac{\partial}{\partial x}$. (Das ist wohldefiniert weil die Kartenübergänge Translationen mit $D\left(\phi_i \phi_j^{-1}\right) = id$ sind.)*
Jedes Vektorfeld auf der $\mathbb{S}^1$ ist von der Form $f\frac{\partial}{\partial \theta} = f\left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$ für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$. (Hierbei fassen wir $\mathbb{S}^1$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ mit Koordinaten (x_1, x_2) auf. $\frac{\partial}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial}{\partial x_2}$ meint die Einschränkung dieser auf dem $\mathbb{R}^2$ definierten Vektorfelder auf die $\mathbb{S}^1$. $\frac{\partial}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial}{\partial x_2}$ sind keine Vektorfelder auf $\mathbb{S}^1$.)

Definition 21 *: Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $X \in Vect(M)$ ein Vektorfeld und $f : M \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Die* **Richtungsableitung** *$X(f)$ in $p \in M$ ist definiert als $\lim_{t\to 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}{t}$ für eine (beliebige) Kurve γ mit $\gamma'(0) = X_p$.*

Beispiel 16 *: Sei $X : \mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ das Vektorfeld $X(x) = (x, e_i)$ für $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Dann ist $X(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Deshalb bezeichnet man dieses Vektorfeld als $\frac{\partial}{\partial x_i}$.*

Damit die Richtungsableitung wohldefiniert ist, muss man natürlich zeigen, dass für verschiedene Kurven γ_1, γ_2 mit $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$ immer gilt: $\lim_{t\to 0} \frac{f(\gamma_1(t)) - f(\gamma_1(0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\gamma_2(t)) - f(\gamma_2(0))}{t}$.

Bezüglich einer Karte ϕ läßt sich jedes Vektorfeld X als $\sum_{i=1}^n X_i(x) D\phi^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ darstellen. Damit gilt dann $(X(f))(x) = \sum_{i=1}^n X_i(x) \frac{\partial\left(f\circ\phi^{-1}\right)}{\partial x_i}(x)$. Dies zeigt insbesondere die Unabhängigkeit von der gewählten Kurve. (Es ist, wie man aus der Transformationsformel sieht, auch unabhängig von der Wahl der Karte.)

Proposition 8 *: Sei X ein Vektorfeld auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M. Dann gilt für alle differenzierbaren Funktionen $f, g : M \to \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$: $X(f+g) = X(f) + X(g), X(\lambda f) = \lambda X(f), X(fg) = fX(g) + X(f)g$.*

Beweis: Es genügt, alle Behauptungen in der Umgebung von Punkten nachzuweisen. Die Umgebung kann man so klein wählen, dass sie in einer Karte enthalten ist. Dann folgen die Behauptungen aus den entsprechenden Gleichungen für Richtungsableitungen im $\mathbb{R}^n$. QED

Lemma 7 *: Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $F : M \to N, f : N \to \mathbb{R}$ differenzierbare Abbildungen, $x \in M$. Dann gilt*

$$(DF(X)) f \ \ (F(x)) = X(f \circ F) \ \ (x).$$

Beweis: Es genügt, die Behauptung in der Umgebung von Punkten nachzuweisen. Die Umgebung kann man so klein wählen, dass sie in einer Karte enthalten ist. Dann folgt die Behauptung aus der Kettenregel für Richtungsableitungen im $\mathbb{R}^n$. QED

Fluß eines Vektorfeldes. Aus dem Existenz- und Eindeutigkeits-Satz für gewöhnliche Differentialgleichungen folgt: zu jedem Vektorfeld X auf einer *kompakten* Mannigfaltigkeit M gibt es einen sogenannten Fluß $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$, so dass mit der Bezeichnung $\Phi_t(x) := \Phi(t, x)$ gilt:

$$\frac{d}{dt} |_{t=t_0} \Phi_t(x) = X(\Phi_{t_0}(x)) \quad \forall x \in M, t_0 \in \mathbb{R}$$

$$\Phi_0 = Id, \Phi_{t+s} = \Phi_t \Phi_s.$$

Weil Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen glatt von den Anfangsbedingungen abhängen, ist $\Phi_t : M \to M$ differenzierbar. Weil Φ_{-t} eine inverse differenzierbare Abbildung ist, ist $\Phi_t : M \to M$ sogar ein Diffeomorphismus, für jedes $t \in \mathbb{R}$. Man nennt Φ_t eine 1-Parameter-Gruppe von Diffeomorphismen. (Die Gleichung $\Phi_{t+s} = \Phi_t \Phi_s$ folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung.)
Umgekehrt kann man natürlich zu jeder 1-Parameter-Gruppe von Diffeomorphismen Φ_t das Vektorfeld $X(x) = \frac{d}{dt} |_{t=0} \Phi_t(x)$ betrachten und erhält so die folgende Proposition.

Proposition 9 *: Sei M eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann gibt es eine Bijektion zwischen $Vect(M)$ und den 1-Parameter-Gruppen von Diffeomorphismen von M.*

Vektorfelder als Derivationen. Sei M eine differenzierbare Mannigfaletigkeit und $C^\infty(M) := \{f : M \to \mathbb{R} \text{ differenzierbar}\}$. Eine Derivation ist eine lineare Abbildung $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, die die Leibnizregel $D(fg) = fD(g) + gD(f)$ für alle $f, g \in C^\infty(M)$ erfüllt. Zum Beispiel ist für jedes Vektorfeld $X \in Vect(M)$ die Richtungsableitung $D(f) := X(f)$ eine Derivation. Es wird, insbesondere für die Definition des Kommutators, häufig einfacher sein, mit Derivation statt mit Vektorfeldern zu arbeiten. Deshalb brauchen wir die folgende Proposition.

Proposition 10 *: Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann ist jede Derivation $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ von der Form $D(f) = X(f)$ für ein eindeutiges Vektorfeld $X \in Vect(M)$ und alle $f \in C^\infty(M)$.*

Beweis: Es genügt, für M offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ zu betrachten, wegen der Eindeutigkeit auf Durchschnitten von Karten erhält man dann Existenz von X auf jeder Mannigfaltigkeit M. Wir nehmen also o.B.d.A an, dass wir Funktionen in einer Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von a betrachten.

Sei eine Derivation D gegeben. Wir betrachten, für $p \in U$, $c_i(p) := D(x_i - a_i)\ (p)$, wobei x_i die Koordinatenfunktionen im $\mathbb{R}^n$ bezeichnen (und a_i die Koordinaten von a sind). Dann definieren wir das Vektorfeld $X(p) = \sum_{i=1}^n c_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}$ und wollen zeigen, dass $X(f) = D(f)$ für alle $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt.

Es gilt bekanntlich, dass es Funktionen $h_i : U \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) - f(p) = \sum_{i=1}^n h_i(x)(x_i - p_i)$$

für alle $x \in U$ ist. Dies ergibt sich nämlich aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wie folgt: $f(x) - f(p) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(t(x-p)+p)\, dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n (x_i - p_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(t(x-p)+p)\, dt$, wobei wir im letzten Schritt die Kettenregel angewandt haben. Wir können also $h_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t(x-p)+p)\, dt$ setzen, womit wir insbesondere $h_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ erhalten.

Zunächst folgt aus der Leibnizregel, dass konstante Funktionen Derivation Null haben. Damit hat f die selbe Derivation wie $f - f(p)$. Außerdem folgt $D(x_i - p_i) = D(x_i - a_i) = c_i$.

Aus der Leibnizregel folgt nun

$$D(f)(x) = \sum_{i=1}^n D(h_i)(x)(x_i - p_i) + h_i(x) D((x_i - p_i)),$$

also

$$D(f)(p) = \sum_{i=1}^n h_i(p) c_i = \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = X(f)(p).$$

Die Eindeutigkeit von X ergibt sich aus folgendem, anschaulich klaren und formal mit sogenannten Glockenfunktionen zu beweisenden, Sachverhalt: zu jedem Vektorfeld $X \not\equiv 0$ gibt es ein $f \in C^\infty(M)$ mit $X(f) \neq 0$.

QED

Wenn D_1 und D_2 Derivationen sind, dann prüft man leicht nach, dass auch $D_2 \circ D_1 - D_1 \circ D_2$ eine Derivation ist. Deshalb ist die folgende Definition möglich.

Definition 22 *: Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $X, Y \in Vect(M)$ Vektorfelder auf M. Der* **Kommutator** *$[X,Y]$ ist das Vektorfeld, welches der Derivation $f \to X(Y(f)) - Y(X(f))$ entspricht.*

Lemma 8 *: In lokalen Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$, mit $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y = \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ist $[X,Y]$ gegeben durch*

$$[X,Y] = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \left(X_k \frac{\partial Y_l}{\partial x_k} - Y_k \frac{\partial X_l}{\partial x_k} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_l}.$$

Beweis: In lokalen Koordinaten ist $X(Y(f)) = X\left(\sum_l Y_l \frac{\partial f}{\partial y_l}\right) = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(Y_l \frac{\partial f}{\partial y_l}\right) = \sum_i X_i \left(\frac{\partial Y_l}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial y_l} + Y_l \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_l}\right)$, analog für $Y(X(f))$. Nach dem Schwarz'schen Lemma ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_l} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_l \partial x_i}$, weshalb sich zwei der vier Summanden wegheben. *QED*

Bemerkung: Derivationen oder Vektorfelder entsprechen Differentialoperatoren erster Ordnung. Die Hintereinanderausführung zweier solcher Operatoren ist ein Differentialoperator zweiter Ordnung, entspricht also keinem Vektorfeld. Der Kommutator ist zwar eigentlich als Differentialoperator zweiter Ordnung definiert, in der lokalen Formel heben sich die Terme zweiter Ordnung aber gerade auf, so dass man einen Differentialoperator erster Ordnung erhält. Dies ist der eigentliche Grund dafür, dass der Kommutator ein Vektorfeld ist.

Proposition 11 *: Seien M, N Mannigfaltigkeiten, $F : M \to N$ ein Diffeomorphismus, und X, Y Vektorfelder auf M. Dann ist*

$$[DF(X), DF(Y)] = DF([X,Y]).$$

Beweis: Dies ergibt sich aus Lemma 7 durch die folgende Rechnung. Zunächst erhält man mit zweimaliger Anwendung von Lemma 7

$$DF(X)\, DF(Y)\, f \;\; (F(x)) = DF(X)\;\; Y(f \circ F)\;\; (x)$$

$$= DF(X)\;\; (Y(f \circ F)) \circ F^{-1}\;\; (F(x)) = X(Y(f \circ F))\;\; (x)$$

und analog $DF(Y)\, DF(X)\, f \;\; (F(x)) = Y(X(f \circ F))\;\; (x)$, also

$$[DF(X), DF(Y)]\, f\;\; (F(x)) = X(Y(f \circ F))\;\; (x) - Y(X(f \circ F))\;\; (x) = [X,Y](f \circ F)\;\; (x),$$

was, wiederum nach Lemma 7, dasselbe ist wie $DF[[X,Y]]\, f\;\; (F(x))$. *QED*

Lemma 9 *: Für den Kommutator von Vektorfeldern X, Y, Z und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $[X,Y] = -[Y,X]$, $[X + \lambda Y, Z] = [X,Z] + \lambda [Y,Z]$ und $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$.*

Beweis:
Die behaupteten Formeln folgen direkt entweder aus Definition 22 oder aus Lemma 8. *QED*

Übungsaufgaben 6 *:*
1. Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $X \in Vect(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie: $X(f) = < grad\ f, X >$.
2. Sei n ungerade. Zeigen Sie, dass es auf der $\mathbb{S}^n$ ein Vektorfeld ohne Nullstellen gibt.
3. Zeigen Sie, dass es auf der $\mathbb{S}^3$ drei Vektorfelder gibt, die in jedem Punkt linear unabhängig sind.
4. Sei $M = \mathbb{S}^2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \| x \| = 1\right\}$ und X das Vektorfeld $X(x) = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$. Bestimmen Sie den Fluß Φ_t zu X.

2.2 Lie-Algebra einer Lie-Gruppe

Wir betrachten in diesem Abschnitt eine Lie-Gruppe G. Für $g \in G$ bezeichnen wir mit $l_g : G \to G$ bzw. $r_g : G \to G$ die Links- bzw. Rechtsmultiplikation mit g, d.h.

$$l_g(h) = gh, r_g(h) = hg$$

für alle $h \in G$.

Definition 23 *: Ein Vektorfeld $X \in Vect(G)$ ist linksinvariant, wenn $X_{gh} = Dl_g(X_h)$ für alle $g, h \in G$ gilt.*

Beispiel 17 *: Auf dem $\mathbb{R}^n$ ist ein Vektorfeld $X(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ genau dann linksinvariant, wenn $a_1, \ldots, a_n$ konstante Funktionen sind.*

Lemma 10 *: Die Menge aller linksinvarianten Vektorfelder mit dem Kommutator $[.,.]$ ist eine abstrakte Lie-Algebra.*

Beweis: Wir haben in Lemma 9 bereits nachgerechnet, dass der Kommutator von Vektorfeldern die Axiome einer Lie-Algebra erfüllt. Wir müssen also nur noch zeigen, dass der Kommutator linksinvarianter Vektorfelder ein linksinvariantes Vektorfeld ist.

Nach Proposition 11 wissen wir, dass für beliebige Diffeomorphismen F und Vektorfelder X, Y gilt: $[DF(X), DF(Y)] = DF([X, Y])$. Mit $F = L_g$ und $DL_g(X) = X, DL_g(Y) = Y$ folgt daraus dann $[X, Y] = DL_g([X, Y])$, also die Linksinvarianz von $[X, Y]$.

QED

Definition 24 *: Sei G eine Lie-Gruppe. Die* **Lie-Algebra** $\mathfrak{g}$ *von G ist definiert als der Vektorraum der linksinvarianten Vektorfelder mit dem Kommutator $[.,.]$.*

Lemma 11 *: Sei G eine Lie-Gruppe mit Einselement e. Dann gibt es einen Vektorraum-Isomorphismus zwischen T_eG und der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G.*

Beweis: Zu jedem $v \in T_eG$ definieren wir ein linksinvariantes Vektorfeld X durch $X_g := Dl_g(v)$ für alle $g \in G$. Es ist klar, dass dies eine Bijektion definiert und verträglich mit Addition und Skalarmultiplikation ist. *QED*

Zu $A \in \mathfrak{g}$ werden wir mit $\overline{A}$ immer das linksinvariante Vektorfeld $\overline{A}(g) = Dl_g(A)$ bezeichnen.

Lemma 12 *: Sei G eine (nicht notwendig kompakte) Lie-Gruppe und X ein linksinvariantes Vektorfeld. Dann existiert eine 1-Parameter-Gruppe von Diffeomorphismen $\Phi : \mathbb{R} \times G \to G$ mit $\frac{d}{dt}|_{t=t_0} \Phi(t, g) = X(\Phi(t_0, g))$ für alle $t_0 \in \mathbb{R}, g \in G$.*

Beweis: Nach dem Existenzsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen kann man jedenfalls zu jedem $g \in G$ ein $\epsilon > 0$ angeben, so dass $\Phi(t, g)$ für $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ definiert ist.

Aus der Linksinvarianz des Vektorfeldes ergibt sich aber, dass man zu jedem $g \in G$ das selbe ϵ wählen kann. Daraus folgt die Fortsetzbarkeit des Flußes auf ganz $\mathbb{R}$. *QED*

Definition 25 *: Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Die Exponentialabbildung $exp : \mathfrak{g} \to G$ ist definiert durch*

$$exp\,(A) := \Phi_1\,(\mathbb{I})\,,$$

wobei $\Phi_t : G \to G$ der Fluß des linksinvarianten Vektorfeldes $\overline{A}$ ist.

Insbesondere gilt für $t \in \mathbb{R}$: $exp\,(tA) = \Phi_t\,(\mathbb{I})$.

Lemma 13 *: Sei G eine Lie-Gruppe. Dann ist $exp : \mathfrak{g} \to G$ ein lokaler Diffeomorphismus um 0.*

Beweis: Aus der Definition folgt, dass $D\,(exp)_0 = id$ ist. *QED*

Insbesondere gibt es, zu zwei Vektoren $X, Y \in T_eG$, eine für hinreichend kleine t definierte Funktion $Z\,(t)$, so dass $exp\,(tX)\,exp\,(tY) = exp\,(Z\,(t))$ gilt. Sei $Z\,(t) = tZ_1 + \frac{t^2}{2}Z_2 + \ldots$ die Taylor-Reihe von Z. Wenn exp analytisch ist, kann man durch Koeffizientenvergleich der Taylorreihen von $f\,(exp\,(tX)\,exp\,(tY)) = f\,(exp\,(Z\,(t)))$ (für analytische Funktionen $f : G \to \mathbb{R}$) die Z_i sukzessive ausrechnen und erhält insbesondere $Z_1 = X + Y, Z_2 = [X, Y]$ (Campbell-Baker-Hausdorff-Formel). Der Kommutator mißt also infinitesimal, wie sehr sich e^{X+Y} von $e^X e^Y$, und damit auch, wie sehr sich $e^X e^Y$ von $e^Y e^X$, unterscheidet.

Lemma 14 *: Sei $F : G_1 \to G_2$ ein differenzierbarer Homomorphismus von Lie-Gruppen. Dann ist $D_{\mathbb{I}}F : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus und es gilt $exp\,(D_{\mathbb{I}}F\,(X)) = F\,(exp\,(X))$ für alle $X \in \mathfrak{g}_1$.*

Beweis: Die erste Behauptung ist ein Spezialfall von Proposition 11.
$exp\,(DF\,(tX))$ und $F\,(exp\,(tX))$ sind 1-Parametergruppen mit Ableitung $DF\,(X)$ in 0. Also müssen sie übereinstimmen, woraus mit $t = 1$ die zweite Behauptung folgt. *QED*

Matrix-Gruppen. Wir zeigen jetzt, dass für Matrix-Gruppen die hier definierten Exponentialabbildungen, Lie-Algebren und Kommutatoren mit den in Kapitel 1 definierten übereinstimmen.

Lemma 15 *: Sei $G = GL\,(n, \mathbb{R})\,, A \in \mathfrak{g} = Mat\,(n, \mathbb{R})$. Dann ist*

$$exp\,(A) = e^A.$$

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass $\Phi_t\,(g) = ge^{tA}$ der Fluß zum linksinvarianten Vektorfeld $\overline{A}\,(g) = gA$ ist. Dafür berechnen wir

$$\frac{d}{dt}\,|_{t=t_0}\, ge^{tA} = g\frac{d}{dt}\,|_{t=t_0}\, \mathbb{I} + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \ldots$$

$$= g\left(A + t_0A^2 + \frac{1}{2!}t_0^2A^3 + \ldots\right) = g\left(\mathbb{I} + t_0A + \frac{1}{2!}t_0^2A^2 + \ldots\right)A = ge^{t_0A}A,$$

also tatsächlich $\frac{d}{dt}\,|_{t=t_0}\, \Phi_t\,(g) = \overline{A}\,(\Phi_{t_0}\,(g))$. *QED*

Korollar 1 *: Für Matrix-Gruppen $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ stimmt die hier definierte Lie-Algebra mit der in Definition 8 definierten Lie-Algebra überein.*

Beweis: Wir bezeichnen mit $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra aus Definition 8 und mit $T_{\mathbb{I}}G$ die in diesem Abschnitt definierte Lie-Algebra. Sei $A \in \mathfrak{g}$. Dann ist $e^{tA} \in G$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Also ist $A = \frac{d}{dt}\mid_{t=0} e^{tA} \in T_{\mathbb{I}}G$. Umgekehrt, sei $A \in T_{\mathbb{I}}G$. Für $t \in \mathbb{R}$ ist dann auch $tA \in T_{\mathbb{I}}G$. Mit Lemma 15 ist dann $e^{tA} = exp(tA) \in G$. *QED*

Schließlich zeigen wir noch, dass für Matrixgruppen der Kommutator von linksinvarianten Vektorfeldern mit dem Kommutator von Matrizen übereinstimmt.

Beispiel 18 *: Sei $G = GL(n, \mathbb{R}), X, Y \in \mathfrak{g} = Mat(n, \mathbb{R})$. Dann ist*

$$\left[\overline{X}, \overline{Y}\right](\mathbb{I}) = XY - YX.$$

Beweis: Wegen Bilinearität genügt es, die Behauptung für $X = e_{pq}, Y = e_{rs}$ nachzuprüfen. In diesem Fall ist $[X, Y]$ entweder 0 (falls $q \neq r, s \neq p$) oder e_{ps} (falls $q = r, s \neq p$) oder $-e_{rq}$ (falls $q \neq r, s = p$) oder $e_{pp} - e_{qq}$ (falls $q = r, s = p$), und wir müssen zeigen, dass dies mit $\left[\overline{X}, \overline{Y}\right](\mathbb{I})$ übereinstimmt.

Für die linksinvarianten Vektorfelder $\overline{X}, \overline{Y}$ haben wir dann

$$\left(\overline{X}(A)\right)_{ij} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & j \neq q \\ A_{ip} & j = q \end{array} \right\}, \left(\overline{Y}(A)\right)_{ij} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & j \neq s \\ A_{ir} & j = s \end{array} \right\}.$$

Nach der lokalen Formel für den Kommutator haben wir

$$\left(\left[\overline{X}, \overline{Y}\right]\right)_{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} \overline{X}_{kl} \frac{\partial \overline{Y}_{ij}}{\partial x_{kl}} - \overline{Y}_{kl} \frac{\partial \overline{X}_{ij}}{\partial x_{kl}}.$$

Die Ableitungen berechnen sich als

$$\frac{\partial \overline{Y}_{ij}}{\partial x_{kl}}(A) = \frac{d}{dt}\mid_{t=0} \overline{Y}(A + te_{kl})_{ij} =$$

$$\left\{ \begin{array}{cc} \frac{d}{dt}\mid_{t=0} (A + te_{kl})_{ir} & j = s \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & j = s, k = i, l = r \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\}.$$

Analog berechnen wir

$$\frac{\partial \overline{X}_{ij}}{\partial x_{kl}}(A) = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & j = q, k = i, l = p \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\}.$$

Es ist klar, dass $\overline{X}_{kl} \frac{\partial \overline{Y}_{ij}}{\partial x_{kl}} - \overline{Y}_{kl} \frac{\partial \overline{X}_{ij}}{\partial x_{kl}}$ nur dann nicht Null sein kann, wenn entweder $\overline{X}_{kl}$ oder $\overline{Y}_{kl}$ nicht Null ist. In $\mathbb{I}$ ist dies nur für $(k, l) = (p, q)$ oder $(k, l) = (r, s)$ der Fall. Deswegen ist

$$\left(\left[\overline{X}, \overline{Y}\right]\right)_{ij}(\mathbb{I}) = \frac{\partial \overline{Y}_{ij}}{\partial x_{pq}}(\mathbb{I}) - \frac{\partial \overline{X}_{ij}}{\partial x_{rs}}(\mathbb{I}).$$

Mit den oben berechneten Ableitungen ergibt sich

$$\left([\overline{X},\overline{Y}]\right)_{ij}(\mathbb{I}) = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & i=p, j=s, q=r \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{cc} 1 & i=r, j=q, s=p \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\},$$

also tatsächlich die (i,j)-Komponente von $[X,Y]$.

QED

Übungsaufgaben 7 *: 1. Sei G eine Lie-Gruppe und $X,Y \in \mathfrak{g}$. Zeigen Sie: $[X,Y] = 0 \Longleftrightarrow e^{sX}e^{tY} = e^{tY}e^{sX}$ für alle $s,t \in \mathbb{R}$.*
2. Sei G eine Lie-Gruppe, H eine Untermannigfaltigkeit, die abgeschlossen unter den Gruppenoperationen ist. Sei $exp : \mathfrak{g} \to G$ die Exponential-Abbildung und $\mathfrak{h} = T_{\mathbb{I}}H \subset T_{\mathbb{I}}G = \mathfrak{g}$. Zeigen Sie: für $X \in \mathfrak{h}$ ist $exp(X) \in H$.
3. Sei G eine Lie-Gruppe, H eine Untermannigfaltigkeit, die abgeschlossen unter den Gruppenoperationen ist. Sei $\Theta : \mathbb{R} \to G$ eine 1-Parametergruppe in G. Zeigen Sie: wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $\Theta(t) \in H$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, dann gilt $\Theta(t) \in H$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

2.3 Abelsche Lie-Gruppen

Definition 26 *: Der l-dimensionale Torus ist die Lie-Gruppe $\mathbb{R}^l/\mathbb{Z}^l$.*

Veranschaulichung: Jeder Punkt in $\mathbb{R}^l$ ist modulo $\mathbb{Z}^l$ äquivalent zu einem Punkt aus $[0,1]^l$. Zwei Punkte $x,y \in [0,1]^l$ sind genau dann äquivalent modulo $\mathbb{Z}^l$, wenn es ein $I \subset \{1,\ldots,l\}$ mit $x_i = 0, y_i = 1$ (oder umgekehrt) für $i \in I$ und $x_j = y_j$ für alle $j \notin I$ gibt. Der l-dimensionale Torus entsteht also aus dem l-dimensionalen Einheitswürfel, indem man die Paare gegenüberliegender Flächen identifiziert.

Satz 4 *: Sei G eine zusammenhängende abelsche Lie-Gruppe. Dann ist G isomorph zu $\mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^l$, mit $k,l \in \mathbb{N}$. (Insbesondere ist jede kompakte, zusammenhängende, abelsche Lie-Gruppe isomorph zu $\mathbb{T}^l$.)*

Beweis:
exp ist ein Homomorphismus. Wir zeigen zunächst (ohne Benutzung der Campbell-Baker-Hausdorff-Formel), dass für *abelsche* Lie-Gruppen die Exponentialabbildung ein Homomorphismus $exp : \mathfrak{g} \to G$ (bzgl. der Vektoraddition in $\mathfrak{g}$) ist. Dafür betrachten wir die Multiplikationsabbildung $m : G \times G \to G$. Wenn G abelsch ist (und nur dann), ist m ein Homomorphismus. Das Differential $Dm_{(e,e)}$ ist $Dm_{(e,e)}(X,Y) = X + Y$. Aus $m(exp\, t(X,Y)) = exp\left(Dm_{(e,e)}(X,Y)\right)$ (wegen Lemma 15) folgt dann $exp(X+Y) = exp(X)\, exp(Y)$.
exp ist surjektiv. Sei d eine linksinvariante Metrik auf G. Weil exp ein lokaler Diffeomorphismus ist, gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass alle g mit $d(g,e) < \epsilon$ im Bild von exp liegen. Weil G zusammenhängend ist, lässt sich jedes $g \in G$ als $g = g_1 \ldots g_k$ mit $d(g_i, e) < \epsilon$ darstellen (man nehme einen Weg von e nach g und zerlege ihn in Stücke der Länge $< \epsilon$). Aus $g_i = exp(X_i)$ folgt, weil exp ein Homomorphismus ist, $g = exp(X_1 + \ldots + X_k)$. Insbesondere ist exp surjektiv. Damit ist $G \simeq \mathfrak{g}/ker(exp) \simeq \mathbb{R}^n/ker(exp)$.
ker (exp) ist diskret. Eine Untergruppe $H \subset G$ heißt diskret, wenn es zu jedem $h \in H$

eine offene Umgebung $U \subset G$ mit $U \cap H = \{h\}$ gibt. Wir benutzen, dass exp ein Homomorphismus ist. Nach Lemma 13 gibt es Umgebungen U von $0 \in \mathfrak{g}$ und V von $e \in G$, so dass $exp\mid_U \colon U \to V$ ein Diffeomorphismus, also bijektiv, ist. Zu $h \in ker\,(exp)$ betrachten wir jetzt die Umgebung $h + U$. Angenommen, es existiert $h + u \in h + U$ mit $h + u \in ker\,(exp)$. Aus $exp\,(h+u) = exp\,(h)$ folgt, weil exp ein Homomorphismus ist, auch $exp\,(u) = exp\,(0)$. Wegen $u \in U$ und weil $exp\mid_U$ eine Injektion ist, folgt $u = 0$. Also ist $(h+U) \cap ker\,(exp) = \{h\}$. Damit ist $ker\,(exp)$ eine diskrete Untergruppe.
Schlußfolgerung. Jede abelsche Gruppe, die keine Elemente endlicher Ordnung hat, ist isomorph zu $\mathbb{Z}^l$ für ein $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Seien $v_1, \ldots, v_l$ Erzeuger von $\mathbb{Z}^l \simeq ker\,(exp)$, die linear unabhängig über $\mathbb{Z}$ (und damit auch über $\mathbb{Q}$) sind. Aus der Diskretheit von $ker\,(exp)$ folgt, dass $v_1, \ldots, v_l$ auch linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind. (Denn aus $v_l = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{l-1} v_{l-1}$ würde folgen, dass man beliebig gut geeignete ganzzahlige Vielfache von v_l durch ganzzahlige Linearkombinationen von $v_1, \ldots, v_{l-1}$ annähern kann.) Nach dem Basisergänzungssatz können wir $\{v_1, \ldots, v_l\}$ zu einer Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von $\mathbb{R}^n \simeq \mathfrak{g}$ ergänzen. Bezüglich dieser Basis erhalten wir dann also einen Isomorphismus $G \simeq \left(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k\right) / \left(\mathbb{Z}^l \times 0\right)$. *QED*

Bezeichnungen:
Sei $\mathbb{T}^l$ ein l-dimensionaler Torus und $p : \mathbb{R}^l \to \mathbb{T}^l$ die kanonische Projektion.

Die lineare Kurve mit Anstieg $(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ ist das Bild der Kurve $\{(t, \theta_1 t, \ldots, \theta_{n-1} t) : t \in \mathbb{R}\}$ unter der Projektion p. (Zum Beispiel für $n = 2$ ist die lineare Kurve mit Anstieg θ genau dann eine geschlossene Kurve, wenn $\theta \in \mathbb{Q}$ ist.) Eine affine Kurve mit Anstieg $(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ ist das Bild der Kurve $\{(x_1 + t, x_2 + \theta_1 t, \ldots, x_n + \theta_{n-1} t) : t \in \mathbb{R}\}$ unter der Projektion p, für einen Punkt $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Als affine Blätterung des l-Torus mit Anstieg $(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ bezeichnen wir die Zerlegung von $\mathbb{T}^l$ in affine Kurven mit Anstieg $(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$. (Offensichtlich geht durch jeden Punkt genau eine solche Kurve.) Die einzelnen Kurven bezeichnen wir als Blätter der Blätterung.

Lineare Diffeomorphismen des Torus. Sei $A \in SL\,(l, \mathbb{Z})$. Dann definieren wir eine (wohldefinierte) Abbildung $f_A : \mathbb{R}^l / \mathbb{Z}^l \to \mathbb{R}^l / \mathbb{Z}^l$ durch

$$f_A\,([x]) := [Ax]\,.$$

Aus $det\,(A) = 1$ und der Cramer'schen Regel folgt, dass auch $A^{-1} \in SL\,(l, \mathbb{Z})$ ist. Offensichtlich ist $f_{A^{-1}}$ die inverse Abbildung, insbesondere ist f_A ein Diffeomorphismus.

Bemerkung (für Hörer mit Topologie-Kenntnissen): mit Überlagerungstheorie kann man zeigen, dass jeder orientierungs-erhaltende Diffeomorphismus von $\mathbb{T}^l$ homotop zu einem linearen Diffeomorphismus ist.

Klassifikation der Diffeomorphismen des 2-Torus. Ein Diffeomorphismus f des 2-Torus heißt :
- periodisch, wenn $f^n = id$ für ein $n \in \mathbb{N}$,
- reduzibel, wenn es eine geschlossene Kurve C mit $f\,(x) \in C$ für alle $x \in C$ gibt,
- Anosov, wenn es zwei Blätterungen $\mathcal{F}^+$ und $\mathcal{F}^-$ und eine reelle Zahl λ mit $\mid \lambda \mid > 1$ gibt, so dass: wenn x, y im selben Blatt von $\mathcal{F}^+$ (bzw. $\mathcal{F}^-$) liegen, dann liegen

$f(x), f(y)$ im selben Blatt von $\mathcal{F}^+$ (bzw. $\mathcal{F}^-$) und es gilt $d(f(x), f(y)) = \lambda d(x,y)$ (bzw. $d(f(x), f(y)) = \frac{1}{\lambda} d(x,y)$.)

Im letzten Fall heissen $\mathcal{F}^+$ und $\mathcal{F}^-$ die expandierende bzw. kontrahierende Blätterung von f.

Satz 5 (Klassifikation der linearen Diffeomorphismen des 2-Torus): *Sei $A \in SL(2,\mathbb{Z})$. Wenn $\mid Tr(A) \mid < 2$, dann ist f_A periodisch. Wenn $\mid Tr(A) \mid = 2$, dann ist f_A reduzibel. Wenn $\mid Tr(A) \mid > 2$, dann ist f_A Anosov.*

Beweis: Man berechnet, dass die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda_{1,2} = \frac{Tr(A)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{Tr(A)}{2}\right)^2 - 1}$$

sind. Wenn $\mid Tr(A) \mid > 2$ ist, dann hat man zwei reelle Eigenwerte λ_1, λ_2, die $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ erfüllen. Insbesondere hat ein Eigenwert λ Betrag größer 1, der andere ist $\frac{1}{\lambda}$. $\mathcal{F}^+$ ist nun die Blätterung durch Kurven parallel zum Eigenvektor von λ, $\mathcal{F}^-$ ist die Blätterung durch Kurven parallel zum Eigenvektor von λ^{-1}.

Wenn $Tr(A) = \pm 2$, dann sind die Eigenwert ± 1. Man kann die Eigenvektoren explizit ausrechnen und feststellen, dass sie rationale Koordinaten haben. Damit läßt f_A eine geschlossene Kurve invariant.

Wenn $\mid Tr(A) \mid < 2$, dann wollen wir zeigen, dass $A^n = \mathbb{I}$, wofür es genügt, zu zeigen, dass A einen Eigenwert $\lambda_1 \neq 1$ mit $\lambda_1^n = 1$ hat. Die Spur von A muß 1,0 oder -1 sein. Für $Tr(A) = 1$ erhalten wir $\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$, also $\lambda_1^6 = 1$. Für $Tr(A) = 0$ erhalten wir $\lambda_1 = i$, also $\lambda_1^4 = 1$. Für $Tr(A) = -1$ erhalten wir $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$, also $\lambda_1^6 = 1$.

QED

3 Elementare Darstellungstheorie

3.1 Definitionen

Sei V ein Vektorraum. Mit $Aut(V)$ bezeichnet man die Gruppe der invertierbaren linearen Abbildungen $f : V \to V$.

Wenn V endlich-dimensional ist, können wir eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ wählen. In dieser Basis wird f dann durch die Matrix $A \in GL(n,\mathbb{R})$ mit Spaltenvektoren $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ beschrieben. (Wenn $\{C(v_1), \ldots, C(v_n)\}$ mit $C \in GL(n,\mathbb{R})$ eine andere Basis ist, dann wird f in dieser Basis durch die Matrix CAC^{-1} beschrieben.)

Diese Identifizierung $Aut(V) = GL(n,\mathbb{R})$ gibt einem insbesondere eine differenzierbare Struktur auf $Aut(V)$. Als Darstellung einer Lie-Gruppe G auf einem Vektorraum V bezeichnet man einen differenzierbaren Homomorphismus $\rho : G \to Aut(V)$. Wir werden immer annehmen, dass wir auf V bereits eine Basis gegeben haben und erhalten so die folgende Definition.

Definition 27 : *Eine (endlich-dimensionale) Darstellung einer Lie-Gruppe G ist ein differenzierbarer Homomorphismus $\rho : G \to GL(n,\mathbb{R})$ für ein $n \in N$. Eine komplexe* *(endlich-dimensionale) Darstellung von G ist ein differenzierbarer Homomorphismus $\rho : G \to GL(n, \mathbb{C})$ für ein $n \in N$.*

Ein einfaches Beispiel ist $\rho(g) = g$ für eine Matrix-Gruppe G. Ein anderes Beispiel ist die triviale Darstellung $\rho(g) = \mathbb{I}$ (für alle $g \in G$) einer beliebigen Gruppe G. Für jede Gruppe $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ ist eine (i.a. nichttriviale) 1-dimensionale Darstellung $\rho : G \to GL(1, \mathbb{R})$ gegeben durch $\rho(A) = det(A)$. (Hierbei haben wir $GL(1, \mathbb{R})$ mit $\mathbb{R} - \{0\}$ identifiziert.)

Definition 28 *: Zwei Darstellungen $\rho_1, \rho_2 : G \to GL(n, \mathbb{R})$ heißen isomorph (oder äquivalent), wenn es ein $A \in GL(n, \mathbb{R})$ mit $\rho_2(g) = A\rho_1(g) A^{-1}$ für alle $g \in G$ gibt.*

Mit anderen Worten: zwei Darstellungen sind äquivalent, wenn sie durch einen Basiswechsel des $\mathbb{R}^n$ ineinander überführt werden.

Beispiel 19 *: 1. Wenn zwei Darstellungen ρ_1, ρ_2 äquivalent sind, dann gilt $det(\rho_1(g)) = det(\rho_2(g))$ und $Tr(\rho_1(g)) = Tr(\rho_2(g))$ für alle $g \in G$.*
2. Die durch $\rho(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gegebene Darstellung $\rho : \mathbb{Z} \to GL(2, \mathbb{R})$ ist nicht äquivalent zur trivialen Darstellung, obwohl alle Spuren und Determinanten übereinstimmen.

Definition 29 *: Sei $\rho : G \to GL(n, \mathbb{R})$ eine Darstellung. Ein Untervektorraum $V \subset \mathbb{R}^n$ heißt invariant, wenn $\rho(g) v \in V$ für alle $g \in G$ und alle $v \in V$ gilt. ρ heißt* **irreduzibel**, *wenn 0 und $\mathbb{R}^n$ die einzigen invarianten Unterräume sind, reduzibel sonst.*

Lemma 16 (Schur's Lemma I)*: Seien $\rho_1 : G \to GL(n, \mathbb{R}), \rho_2 : G \to GL(m, \mathbb{R})$ zwei irreduzible Darstellungen und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit $f(\rho_1(g) v) = \rho_2(g) f(v)$ für alle $g \in G, v \in \mathbb{R}^n$. Dann ist f ein Isomorphismus oder $f = 0$.*

Beweis: : $ker(f)$ ist invariant für ρ_1, $im(f)$ ist invariant für ρ_2. Weil beide Darstellungen irreduzibel sind, müssen Bild und Kern entweder 0 oder der ganze Raum sein. Wenn $ker(f) = 0$ und $im(f) = \mathbb{R}^m$, dann ist f ein Isomorphismus. In den drei anderen Fällen ist $f = 0$. *QED*

Korollar 2 (Schur's Lemma II)*: Seien $\rho : G \to GL(n, \mathbb{C})$ eine irreduzible komplexe Darstellung und $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ eine lineare Abbildung mit $f(\rho(g) v) = \rho(g) f(v)$ für alle $g \in G, v \in \mathbb{C}^n$. Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $f(v) = \lambda v$ für alle $v \in \mathbb{C}^n$.*

Beweis: : f hat mindestens einen (komplexen) Eigenwert $\lambda \neq 0$. Für diesen enthält dann $ker(f - \lambda Id)$ den zugehörigen Eigenvektor $v \neq 0$, also kann $f - \lambda Id$ kein Isomorphismus sein. Weil aber $(f - \lambda id)(\rho(g) v) = \rho(g)(f - \lambda Id)(v)$ für alle $g \in G, v \in \mathbb{C}^n$ gilt, folgt aus Schur's Lemma I, dass $f - \lambda Id = 0$ sein muß. *QED*

Definition 30 *(Direkte Summe von Darstellungen): Seien $\rho_1 : G \to GL(n, \mathbb{R})$ und $\rho_2 : G \to GL(m, \mathbb{R})$ zwei Darstellungen. Dann ist die direkte Summe $\rho_1 \oplus \rho_2 : G \to GL(n + m, \mathbb{R})$ definiert durch $(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(v_1, v_2) := (\rho_1(g) v_1, \rho_2(g) v_2)$ für $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$.*

Definition 31 *: Sei $\rho : G \to GL(n, \mathbb{R})$ eine Darstellung. Ein Skalarprodukt $< ., . >$ auf $\mathbb{R}^n$ heißt ρ-invariant, wenn für alle $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n, g \in G$ gilt:*

$$< \rho(g) v_1, \rho(g) v_2 >=< v_1, v_2 > .$$

Proposition 12 *Sei $\rho : G \to GL(n, \mathbb{R})$ eine Darstellung. Wenn es ein ρ-invariantes Skalarprodukt $< ., . >$ auf $\mathbb{R}^n$ gibt, dann ist ρ direkte Summe irreduzibler Darstellungen.*

Beweis: Sei W ein ρ-invarianter Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Sei $W^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n :< y, x >= 0 \forall y \in W\}$. Mit $x \in W^\perp$ ist für alle $g \in G$ auch $< y, \rho(g) x >=< \rho(g^{-1}) y, x >= 0$ wegen $\rho(g^{-1}) y \in W$, also $\rho(g) x \in W^\perp$. $W^\perp$ ist also ebenfalls ρ-invariant.

Jedes $x \in \mathbb{R}^n$ lässt sich als $x = w + u$ mit $w \in W, u \in W^\perp$ zerlegen. Nämlich, sei $v_1, \ldots, v_n$ eine ON-Basis, so dass $v_1, \ldots, v_k$ eine Basis von W ist, und sei M *bzgl. dieser Basis* die Matrix mit Spaltenvektoren $(1, 0, \ldots, 0)^T, \ldots, (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0)^T, 0, \ldots, 0$ (d.h. k Basisvektoren und $n-k$ Nullvektoren). Dann ist $w := Mx \in W$ und $u := x - Mx \in W^\perp$.

Die Zerlegung $\mathbb{R}^n = W + W^\perp$ ist eine direkte Summe, weil $< ., . >$ positiv definit ist.

Wir haben also den Vektorraum als direkte Summe zweier invarianter Unterräume zerlegt. Die Behauptung folgt jetzt durch Induktion nach der Dimension. *QED*

Lemma 17 *: Sei G eine kompakte Lie-Gruppe. Dann lässt sich jede Darstellung von G als direkte Summe irreduzibler Darstellungen zerlegen.*

Beweis: Aus der Maß-Theorie ist bekannt, dass es auf einer kompakten topologischen Gruppe ein Wahrscheinlichkeitsmaß $d\mu$ gibt, das unter der Gruppenmultiplikation invariant ist. Zu einer Darstellung $\rho : G \to GL(n, \mathbb{R})$ definieren wir nun ein ρ-invariantes Skalarprodukt $< ., . >_\rho$ durch

$$< v, w >_\rho = \int_G < \rho(g) v, \rho(g) w > d\mu(g)$$

für $v, w \in \mathbb{R}^n$ und $< ., . >$ das euklidische Skalarprodukt. Die Behauptung folgt dann aus Proposition 12. *QED*

Tensorprodukt. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ und W ein m-dimensionaler Vektorraum mit Basis $\{f_1, \ldots, f_m\}$. Mit $V \otimes W$ bezeichnet man den nm-dimensionalen Vektorraum, seine Basisvektoren bezeichnet man mit $e_i \otimes f_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$. Es soll gelten $(\sum a_i e_i) \otimes (\sum b_j f_j) = \sum a_i b_j e_i \otimes f_j$.

Definition 32 *(Tensorprodukt von Darstellungen): Seien $\rho_1 : G \to GL(n, \mathbb{R})$ und $\rho_2 : G \to GL(m, \mathbb{R})$ zwei Darstellungen. Dann ist das Tensorprodukt $\rho_1 \otimes \rho_2 : G \to GL(nm, \mathbb{R})$ definiert durch*

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) e_i \otimes f_j := \rho_1(g) e_i \otimes \rho_2(g) f_j$$

für $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$.

Eine andere Schreibweise, wenn wir eine Basis $e_1, \ldots, e_{nm}$ auf $\mathbb{R}^{nm}$ wählen: $(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) e_{an+b} := \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m q_j p_i e_{in+j}$ für $0 \leq a \leq m, 0 \leq b \leq n$ und $\rho_1(e_b) = \sum_{j=1}^n q_j e_j, \rho_2(f_a) = \sum_{i=1}^m p_i f_i$.

Darstellungen von Lie-Algebren.

Definition 33 *: Eine Darstellung einer (abstrakten) Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist ein Vektorraum-Homomorphismus $\pi : \mathfrak{g} \to Mat(n, \mathbb{R})$ mit $\pi([X,Y]) = [\pi(X), \pi(Y)]$ für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$.*

Definition 34 *: Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Sei $\rho : G \to GL(n, \mathbb{R})$ eine Darstellung. Die zu ρ* **assoziierte Lie-Algebra-Darstellung** *$\pi : \mathfrak{g} \to Mat(n, \mathbb{R})$ ist definiert als $\pi = D_e \rho$, d.h. sie ist definiert durch $\pi(X) = \frac{d}{dt} |_{t=0} \rho(exp(tX))$ für $X \in \mathfrak{g}$.*

Lemma 18 *: Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe. Eine Darstellung $\rho : G \to GL(n, \mathbb{R})$ ist irreduzibel genau dann, wenn die assoziierte Darstellung π irreduzibel ist.*

Beweis: Nach Lemma 14 gilt für die assoziierte Darstellung: $\rho(exp(tX)) = e^{t\pi(X)}$ für alle $X \in \mathfrak{g}$.

Sei ρ irreduzibel und W ein π-invarianter Unterraum. Sei $X \in \mathfrak{g}$ und $A = \pi(X) \in Mat(n, \mathbb{R})$. Nach Annahme gilt $Av \in W$ für alle $v \in W$. Damit ist aber auch $e^A v = v + Av + \frac{1}{2}A^2 v + \ldots \in W$. Wegen Lemma 14 folgt $\rho(exp(X)) v \in W$. Wir haben also gezeigt, dass W invariant unter allen Matrizen der Form $\rho(exp(X))$ ist. Weil exp ein lokaler Diffeomorphismus um 0 ist und sich in einer zusammenhängenden Lie-Gruppe jedes Element als Produkt von Elementen in einer gegebenen Umgebung von e darstellen läßt, folgt ρ-Invarianz von W, woraus sich $W = 0$ oder $W = \mathbb{R}^n$ ergibt.

Sei π irreduzibel und W ein ρ-invarianter Unterraum. Für $X \in \mathfrak{g}, t \in \mathbb{R}, v \in W$ ist dann $\rho(exp(tX)) v \in W$. Weil dies für alle t gilt und W ein Untervektorraum ist, folgt $\frac{d}{dt} |_{t=0} \rho(exp(tX)) v \in W$, also $\pi(X) v \in W$. Damit haben wir gezeigt, dass W auch π-invariant ist, woraus $W = 0$ oder $W = \mathbb{R}^n$ folgt. *QED*

Übungsaufgaben 8 *: 1. Sei $\rho : G \to GL(n, \mathbb{R})$ eine Darstellung und $A, B \in G$ mit $AB = BA$. Zeigen Sie: wenn $\rho(A)$ n verschiedene Eigenwerte hat, dann ist auch $\rho(B)$ diagonalisierbar.*
2. Sei $\rho : SO(2) \to GL(n, \mathbb{C})$ eine irreduzible Darstellung. Zeigen Sie: $n = 1$.
3. Zeigen Sie, dass die Inklusion $SU(n) \to GL(n, \mathbb{C})$ eine irreduzible Darstellung ist.

3.2 Darstellungen abelscher Gruppen

Proposition 13 *: Sei G eine abelsche Gruppe, $\rho : G \to Gl(n, \mathbb{C})$ eine irreduzible komplexe Darstellung. Dann ist $n = 1$.*

Beweis: : Sei $h \in G$ ein festes Element und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die durch $f(v) = \rho(h) v$ definierte Abbildung. Weil G abelsch ist, gilt für alle $g \in G, v \in \mathbb{R}^n$: $f(\rho(g) v) = \rho(h) \rho(g) v = \rho(hg) v = \rho(gh) v = \rho(g) \rho(h) v = \rho(g) f(v)$. Nach Schur's Lemma II folgt, daß $f(v)$ ein (komplexes) Vielfaches von v ist.

Sei $v \in \mathbb{C}^n$ und $V \subset \mathbb{C}^n$ der von v erzeugte 1-dimensionale (komplexe) Unterraum. Wir haben gezeigt, daß für jedes $h \in G$ gilt: $\rho(h) V \subset V$, d.h. V ist invariant. Wegen der Irreduzibilität von ρ folgt $n = 1$. *QED*

Beispiel 20 *: Sei $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Eine 1-dimensionale irreduzible Darstellung ρ_m von $\mathbb{S}^1$ ist gegeben durch $\rho_m(z) = (z^m)$.*

Beispiel 21 *: Sei $a \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$. Eine 1-dimensionale irreduzible Darstellung ρ_a von $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ ist gegeben durch $\rho_a(z) = \left(e^{2\pi i<a,z>}\right)$.*

Proposition 14 *: Zu jeder Darstellung $\rho : \mathbb{T}^n \to GL(m, \mathbb{C})$ gibt es (nicht notwendig verschiedene) $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}^n$ mit*

$$\rho = \rho_{a_1} \oplus \ldots \oplus \rho_{a_m}.$$

Beweis: Nach Proposition 13 wissen wir, dass alle irreduziblen Darstellungen von $\mathbb{T}^n$ 1-dimensional sind. Wir zeigen, dass alle 1-dimensionalen Darstellungen von $\mathbb{T}^n$ durch Beispiel 23 gegeben sind. Mit Lemma 17 folgt daraus, dass sich jede komplexe Darstellung von $\mathbb{T}^n$ als direkte Summe von ρ_a's zerlegen läßt.

Sei ρ eine 1-dimensionale komplexe Darstellung von $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Wir haben also einen Homomorphismus $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^*$ mit $\rho(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{Z}^n$. Jeder Homomorphismus $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ist von der Form $\rho(x_1, \ldots, x_n) = e^{2\pi i(a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n)}$. Wegen $\rho(\mathbb{Z}^n) = 1$ folgt, dass $a_1, \ldots, a_n$ ganze Zahlen sein müssen. *QED*

Definition 35 *: Sei $\rho : \mathbb{T}^n \to GL(m, \mathbb{C})$ eine Darstellung. Ein Homomorphismus $\theta : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ heißt ein Gewicht von ρ, wenn*

$$V_\theta := \{v \in V : \rho(g)v = \theta(g)v \text{ für alle } g \in \mathbb{T}^n\} \neq \{0\}$$

ist.

Die Gewichte entsprechen also genau den irreduziblen Summanden einer Darstellung von $\mathbb{T}^n$.

Übungsaufgaben 9 *: 1. Bestimmen Sie alle Gewichte von ρ_a aus Beispiel 21. Zeigen Sie: zu jedem Homomorphismus $\theta : \mathbb{T}^n \to \mathbb{S}^1$ gibt es (mindestens) eine Darstellung $\rho : \mathbb{T}^n \to GL(m, \mathbb{C})$, deren Gewicht θ ist.*

3.3 Adjungierte Darstellung und Killingform

Sei G eine Lie-Gruppe, $g \in G$ ein fest gewähltes Element.

Die Konjugation mit g ist gegeben durch

$$c_g = l_g r_{g^{-1}} : G \to G$$

$$c_g(h) = ghg^{-1}.$$

Insbesondere ist $c_g(e) = e$, so dass das Differential im neutralen Element e den Tangentialraum $\mathfrak{g} = T_eG$ auf sich abbildet:

$$(Dc_g)_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}.$$

$(Dc_g)_e$ ist linear und invertierbar, weil aus $c_{g^{-1}}c_g = id$ und $c_g c_{g^{-1}} = id$ folgt: $(Dc_g)_e \left(Dc_{g^{-1}}\right)_e = id = \left(Dc_{g^{-1}}\right)_e (Dc_g)_e$. Wir erhalten also zu jedem $g \in G$ eine Abbildung $(Dc_g)_e \in GL(\mathfrak{g})$.

($\mathfrak{g}$ ist ein Vektorraum und kann nach Wahl einer Basis mit dem $\mathbb{R}^n$ identifiziert werden. Mit einer gewählten Basis ist also $GL(\mathfrak{g}) = GL(n,\mathbb{R})$.)

Die so erhaltene Abbildung nennen wir die adjungierte Abbildung

$$Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$$

$$Ad(g) := (Dc_g)_e .$$

Wegen $c_e = id$ und $c_{kh} = c_k c_h$ gilt $Ad(e) = \mathbb{I}$ und $Ad(kh) = Ad(k)\,Ad(h)$ für alle $k,h \in G$. Ad ist also ein Homomorphismus.

Weil wir annehmen, dass die Gruppenoperationen auf G (beliebig oft) differenzierbar sind, ist Ad differenzierbar und wir können sein Differential in e betrachten:

$$ad := (D\ Ad)_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}).$$

(Hierbei bezeichnet $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ die Lie-Algebra zu $GL(\mathfrak{g})$. Nach Wahl einer Basis ist bekanntlich $GL(\mathfrak{g}) = GL(n,\mathbb{R})$ und $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) = Mat(n,\mathbb{R})$.)

Lemma 19 *: ad ist ein Lie-Algebren-Homomorphismus und es gilt* $Ad(exp\ X) = exp(ad\ X)$ *für alle* $X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Beweis: Weil Ad ein Homomorphismus von Lie-Gruppen ist, folgen die Behauptungen aus Lemma 14. *QED*

Beispiel 22 *: Sei* $G \subset GL(n,\mathbb{R})$ *eine Matrix-Gruppe. Dann ist*

$$Ad(g) : X \to gXg^{-1},$$

$$ad(X) : Y \to [X,Y]$$

für alle $g \in G \subset GL(n,\mathbb{R})\,, X,Y \in \mathfrak{g} \subset Mat(n,\mathbb{R})$.

Beweis:

$$Ad(g)\ (X) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\ c_g\left(e^{tX}\right) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\ ge^{tX}g^{-1} = gXg^{-1},$$

und damit

$$ad(X)\ (Y) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\ Ad\left(e^{tX}\right)\ (Y) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\ e^{tX}Ye^{-tX} = XY - YX,$$

wobei wir im letzten Schritt die Produktregel angewandt haben. *QED*

Lemma 20 *: Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$. *Dann ist*

$$ad(X)(Y) = [X,Y]$$

für alle $X,Y \in \mathfrak{g}$.

Beweis: Es ist $ad(X)(Y) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, Ad\left(e^{tX}\right)(Y) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, \frac{d}{ds}|_{s=0}\, c_{e^{tX}}\, e^{sY} = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, \frac{d}{ds}|_{s=0}\, e^{tX}e^{sY}e^{-tX} = [X,Y]$, wobei man die letzte Gleichung durch Koeffizientenvergleich von Taylorreihen erhält.

QED

Bemerkung: Weil ad ein Lie-Algebren-Homomorphismus ist, liefert die Beziehung $ad(X)(Y) = [X,Y]$ einen weiteren Beweis für die Jacobi-Identität.

Korollar 3 *: Sei G eine Lie-Gruppe und $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ein Lie-Algebren-Isomorphismus. Dann ist*

$$ad(f(X)) = f \circ ad(X) \circ f^{-1}$$

für alle $X \in \mathfrak{g}$.

Beweis: Weil f ein Lie-Algebren-Homomorphismus ist, ist $[fX, Y] = f\left[X, f^{-1}Y\right]$. Wegen $ad(.)(Y) = [., Y]$ folgt daraus die Behauptung. *QED*

Beispiel 23 *: Die adjungierte Darstellung von $sl(2,\mathbb{C})$.*

$sl(2,\mathbb{C})$ ist als Vektorraum isomorph zu $\mathbb{C}^3$, eine Basis ist gegeben durch $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Man rechnet nach, dass $[H,X] = 2X, [H,Y] = -2Y$ und $[X,Y] = H$ (und natürlich $[X,X] = [Y,Y] = [H,H] = 0$) gilt. Bezüglich der Basis $\{H,X,Y\}$ ist also

$$ad(H) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, ad(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, ad(Y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir definieren als nächstes eine Ad-invariante Bilinearform auf Lie-Algebren. Im Kapitel über Riemannsche Geometrie werden wir zeigen, dass man diese Form benutzen kann, um auf kompakten Lie-Gruppen eine biinvariante Riemannsche Metrik zu definieren.

Definition 36 *: Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Die Killingform $B : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch*

$$B(X,Y) = Tr(adX \circ adY).$$

Proposition 15 *:*
(i) B ist eine symmetrische Bilinearform.
(ii) Es gilt $B(X,Y) = B(Ad(g)(X), Ad(g)(Y))$ für alle $g \in G, X, Y \in \mathfrak{g}$. (Man sagt, B ist $Ad(G)$-invariant.)
(iii) Für alle X,Y,Z ist $B(ad(Z)(X), Y) = -B(X, ad(Z)(Y))$

Beweis:
(i) Bilinearität ist klar. Symmetrie folgt aus der bekannten Formel $Tr(AB) = Tr(BA)$.
(ii) Wir wenden Korollar 3 mit $f(X) = Ad(g)(X)$ bzw. $f(Y) = Ad(g)(Y)$ an und erhalten:

$$B(Ad(g)(X), Ad(g)(Y)) = Tr(ad(Ad(g)X)\, ad(Ad(g)Y)) = Tr\left(Ad(g)\, ad(X)\, Ad(g)^{-1}\, Ad(g)\, ad(Y)\, Ad(g)^{-1}\right)$$

$$= Tr\left((Ad(g)\, ad(X)\, ad(Y)\, Ad(g)^{-1}\right) = Tr\,(ad(X)\, ad(Y)) = B(X,Y).$$

(iii) Durch zweimalige Anwendung der Jacobi-Identität erhält man $[Z,[X,[Y,W]]] = [[Z,X],[Y,W]]+[X,[[Z,Y],W]]+[X,[Y,[Z,W]]]$, also $[adZ, adX \circ adY] = ad\,(adZ\,(X)) \circ adY + adX \circ ad\,(adZ\,(Y))$. Weil Kommutatoren Spur 0 haben, folgt daraus die Behauptung. *QED*

Definition 37 : *Eine Lie-Algebra heißt halbeinfach, wenn die Killingform nichtentartet ist.*

Satz 6 : *Wenn G eine kompakte, halbeinfache Lie-Gruppe ist, dann ist die Killing-Form von $\mathfrak{g}$ negativ definit.*

Beweis: Weil G kompakt ist, gibt es zu jeder Darstellung $\rho : G \to GL(n,\mathbb{R})$ nach dem Beweis von Lemma 17 ein Skalarprodukt, welches $\rho(g)$-invariant für alle $g \in G$ ist. Wir wenden dies an mit $\rho = Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$ und erhalten ein Ad-invariantes Skalarprodukt auf $\mathfrak{g}$.

Wir wählen mit dem Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren eine Orthonormalbasis von $\mathfrak{g}$ (bzgl. des Ad-invarianten Skalarprodukts). Weil $Ad(g)$ das Skalarprodukt invariant läßt, gilt in dieser Basis $Ad(g) \in O(n)$, für alle $g \in G$.

Wegen $e^{ad(tX)} = Ad\left(e^{tX}\right) \in O(n)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ folgt $ad(X) \in o(n)$, d.h. $ad(X)$ ist bezüglich der gewählten Basis schiefsymmetrisch.

Schiefsymmetrische Matrizen A erfüllen $A + A^T = 0$, insbesondere gilt für die Eigenwerte $\lambda + \overline{\lambda} = 0$, d.h. die Eigenwerte sind rein imaginär und es gilt $\lambda^2 \leq 0$.

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von $ad(X)$, dann gilt also

$$B(X,X) = Tr\left((ad(X))^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \leq 0.$$

Damit ist B negativ semidefinit. Weil G halbeinfach ist, muß B sogar negativ definit sein.

QED

Übungsaufgaben 10 : *1. Sei G eine Lie-Gruppe, ρ eine Darstellung von G und π die assoziierte Lie-Algebren-Darstellung von $\mathfrak{g}$. Zeigen Sie: $\pi\left(gAg^{-1}\right) = \rho(g)\,\pi(A)\,\rho\left(g^{-1}\right)$ für $g \in G, A \in \mathfrak{g}$.*
2. Bestimmen Sie die adjungierte Darstellung von $su(2)$ (bzgl. einer geeigneten Basis).
3. Zeigen Sie: für $\mathfrak{g} = su(2)$ ist $B(X,Y) = 4Tr(XY)$.
4. Zeigen Sie, dass die Killingform von $sl(2,\mathbb{C})$ nicht negativ definit ist.

3.4 Darstellungen von $SU(2)$

Die Gruppe $SU(2)$ ist in der Quantenphysik von Bedeutung, weil sie isomorph zu $Spin(3)$, der zweifachen Überlagerung von $SO(3)$ ist. Ihre Lie-Algebra ist ein 3-dimensionaler Vektorraum mit Basis

$$iH = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $[iH, X] = 2Y, [iH, Y] = -2X, [X, Y] = 2iH$.

Komplexifizierung. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra mit Basis $e_1, \ldots, e_n$ und Kommutator $[.,.]$. Als Komplexifizierung von g bezeichnet man den komplexen Vektorraum mit $\mathbb{C}$-Basis $e_1, \ldots, e_n$ und Kommutatorregel $[x + iy, z + iw] = [x, y] - [z, w] + i[y, z] + i[x, w]$.
Beispiel: Die Komplexifizierung von $su(2)$ ist isomorph zu $sl(2, \mathbb{C})$. Tatsächlich lässt sich jede Matrix (mit Spur 0) als Summe einer schief-hermiteschen und einer hermiteschen Matrix zerlegen, und hermitesche Matrizen sind rein-imaginäre Vielfache von schief-hermiteschen Matrizen.

Wir betrachten $sl(2, \mathbb{C})$ mit der komplexen Basis

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, X_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, X_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $[H, X_+] = 2X_+, [H, X_+] = -2X_-, [X_+, X_-] = H$.

In der Quantenmechanik berechnet man Eigenwerte des Drehimpulsoperators $L = \frac{h}{i} x \times \nabla$, wobei x Multiplikation mit der Ortsvariablen und ∇ die Ortsableitung bezeichnet. Seien L_x, L_y, L_z die drei Komponenten von L, und $L_\pm = L_x \pm iL_y$, dann gilt $[L_z, L_\pm] = \pm hL_\pm$ und $[L_+, L_-] = 2hL_z$. Nach einer passenden Normierung der Basisvektoren ist diese Drehimpulsalgebra also isomorph zur Komplexifizierung der Lie-Algebra von $SU(2)$. Wir klassifizieren nun die **irreduziblen Darstellungen der Lie-Algebra** $sl(2, \mathbb{C})$.

Satz 7 : *Sei π eine irreduzible Lie-Algebren-Darstellung von $sl(2, \mathbb{C})$ auf einem komplexen Vektorraum V. Dann gibt es eine Basis $\{v_0, \ldots, v_n\}$ von V mit*
a) $\pi(H) v_i = (n - 2i) v_i$ für $i = 0, \ldots, n$,
b) $\pi(X_+) v_0 = 0$,
c) $\pi(X_-) v_i = v_{i+1}$ für $i = 0, \ldots, n - 1$, und $\pi(X_-) v_n = 0$,
d) $\pi(X_+) v_i = i(n - i + 1) v_{i-1}$.

Beweis: Sei v ein Eigenvektor von $\pi(H)$, also $\pi(h) v = \lambda v$. Dann ist

$$\pi(H) \pi(X_+) v = \pi(X_+) \pi(H) v + \pi([H, X_+]) v = \pi(X_+) \lambda v + \pi(2X_+) v = (\lambda + 2) \pi(X_+) v,$$

$\pi(X_+) v$ ist also ebenfalls ein Eigenvektor von $\pi(H)$, zum Eigenwert $\lambda + 2$. Durch Induktion folgt, dass $\pi(X_+)^i v$ ein Eigenvektor von $\pi(H)$ zum Eigenwert $\lambda + 2i$ ist. Weil $\pi(H)$ höchstens $n + 1$ Eigenwerte haben kann, mußes also ein i mit $\pi(X_+)^i v = 0$ geben. Sei i_0 ein minimales solches i, d.h. $\pi(X_+)^{i_0} v = 0, \pi(X_+)^{i_0 - 1} v \neq 0$. Wir definieren nun $v_0 := \pi(X_+)^{i_0 - 1} v$ und $v_i := \pi(X_-)^i v_0$ für $i \geq 1$. Dann sind die Bedingungen b) und c) erfüllt.

Sei $\mu = \lambda + 2i_0 - 2$, dann ist nach Konstruktion v_0 Eigenvektor von $\pi(H)$ zum Eigenwert μ. Wegen

$$\pi(H) \pi(X_-) v_0 = \pi(X_+) \pi(H) v_0 + \pi([H, X_-]) v_0 = \pi(X_-) \lambda v_0 - \pi(2X_-) v_0 = (\mu - 2) \pi(X_-) v_0,$$

also ist $\pi(X_-) v_0$ Eigenvektor von $\pi(H)$ zum Eigenwert $\mu - 2$ und, durch Induktion, $\pi(X_-)^i v_0$ Eigenvektor von $\pi(H)$ zum Eigenwert $\mu - 2i$. Dies zeigt insbesondere, dass $v_0, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, wobei wir mit n die größte Zahl i bezeichnen, für die $\pi(X_-)^i v_0 \neq 0$ ist.

Weil $H = [X_+, X_-]$ ein Kommutator ist, muß $Tr(\pi(H)) = 0$ sein. Die Eigenwerte von $\pi(H)$ sind $\mu - 2i$ für $0 \leq i \leq n$. Also ist $0 = \sum_{i=0}^{n} \mu - 2i = (n+1)\mu - 2\sum_{i=0}^{n} i$. Daraus folgt $\mu = n$, und damit a).

Aus b) folgt der Induktionsanfang für d) mit $i = 0$.
Wir zeigen jetzt d) durch Induktion. Es ist

$$\pi(X_+) v_{i+1} = \pi(X_+) \pi(X_-) v_i = \pi([X_+, X_-]) v_i + \pi(X_-) \pi(X_+) v_i =$$

$$\pi(H) v_i + \pi(X_-) (i(n-i+1) v_{i-1}) = (n-2i) v_i + i(n-i+1) v_i = (i+1)(n-i) v_i.$$

Der von $v_0, \ldots, v_n$ aufgespannte Unterraum von V ist damit unter $\pi(H), \pi(X_+), \pi(X_-)$, und damit unter ganz $\pi(sl(2,\mathbb{C}))$ invariant. Wegen Irreduzibilität mußalso $v_0, \ldots, v_n$ eine Basis von V sein. *QED*

Korollar 4 *: Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ gibt es eine (bis auf Isomorphie) eindeutige irreduzible Darstellung $\pi_m : sl(2,\mathbb{C}) \to Mat(m+1,\mathbb{C})$.*

Beweis: Eindeutigkeit bis auf Isomorphie folgt aus Satz 7. Zur Existenz muß man nachrechnen, dass durch die in den Bedingungen a)-d) von Satz 7 bestimmten Wirkungen von H, X_+, X_- auf $\mathbb{C}^{m+1}$ tatsächlich eine Lie-Algebren-Darstellung definiert wird. Dafür genügt es, zu zeigen, dass tatsächlich $[\pi(H), \pi(X_+)] = 2\pi(X_+), [\pi(H), \pi(X_-)] = -2\pi(X_-), [\pi(X_+), \pi(X_-)] = \pi(H)$ gilt, was man durch direktes Nachrechnen überprüft. *QED*

Korollar 5 *: Die Einschränkung von π_m auf $su(2) \subset sl(2,\mathbb{C})$ ist eine irreduzible Lie-Algebren-Darstellung. Jede irreduzible Darstellung von $su(2)$ ist die Einschränkung einer irreduziblen Darstellung von $sl(2,\mathbb{C})$.*

Beweis: Sei H, X_+, X_- die Basis von $sl(2,\mathbb{C})$. Dann ist $iH, X = X_+ - X_-, Y = i((X_+ - X_-)$ eine Basis von $su(2)$.

Wir nehmen nun an, es gäbe einen invarianten Unterraum $W \subset \mathbb{C}^{n+1}$ für $su(2)$. Weil er unter $\pi(iH)$ invariant ist, muß er mindestens einen Eigenvektor von $\pi(iH)$, also mindestens ein v_k enthalten. Damit enthält er aber auch wegen $\pi(X_+) = \frac{1}{2}\pi(X+Y)$ und $\pi(X_-) = \frac{i}{2}\pi(X-Y)$ auch $v_{k+1} = \pi(X_-) v_k$ und $v_{k-1} = \frac{1}{k(m-k+1)} \pi(X_+) v_k$. Durch Induktion erhält man, dass W alle Basisvektoren enthält.

Weil $sl(2,\mathbb{C})$ die Komplexifizierung von $su(2)$ ist jede Darstellung von $su(2)$ die Einschränkung einer Darstellung von $sl(2,\mathbb{C})$, nämlich ihrer Komplexifizierung. Die zweite Behauptung folgt dann aus der folgenden trivialen Beobachtung: Wenn π eine Darstellung einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist, so dass die Einschränkung $\pi \mid_{\mathfrak{h}}$ auf eine Unter-Lie-Algebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ irreduzibel ist, dann ist π irreduzibel. *QED*

Wir wollen nun irreduzible Darstellungen von $SU(2)$ konstruieren.

Für $m \in \mathbb{N}$ betrachten wir den Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad m in zwei komplexen Variablen

$$V_m := \left\{ f(z_1, z_2) = a_0 z_1^m + a_1 z_1^{m-1} z_2 + a_2 z_1^{m-2} z_2^2 + \ldots + a_m z_2^m : a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{C} \right\}.$$

Für $A \in SU(2) \subset GL(2,\mathbb{C})$ definieren wir

$$(\rho_m(A)(f))(z_1, z_2) := f\left(A^{-1}(z_1, z_2)\right).$$

Man prüft nach, daß$(\rho_m(A)(f)) \in V_m$ und dass $\rho_m : SU(2) \to GL(V_m) = GL(m+1,\mathbb{C})$ eine Darstellung ist. Wir wollen zeigen, dass diese Darstellungen **irreduzibel** sind. Dafür genügt es nach Lemma 18, zu zeigen, dass die assoziierte Darstellung von ρ_m irreduzibel ist, und dies ergibt sich aus der folgenden Proposition.

Proposition 16 *: π_m ist die Komplexifizierung der assoziierte Darstellung zu ρ_m.*

Beweis: : Sei Π_m die Komplexifizierung der assoziierten Darstellung zu ρ_m. Wir wollen zeigen, dass $\Pi_m = \pi_m$.

Es ist

$$\Pi_m(H) z_1^k z_2^{m-k} = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, \rho_m\left(e^{tH}\right) z_1^k z_2^{m-k} = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, \rho_m \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} z_1^k z_2^{m-k}$$

$$= \frac{d}{dt}|_{t=0} \left(e^{-t} z_1\right)^k \left(e^t z_2\right)^{m-k} = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, e^{t(m-2k)} z_1^k z_2^{m-k} = (m-2k)\, z_1^k z_2^{m-k}$$

und analog

$$\Pi_m(X_+) z_1^k z_2^{m-k} = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, \rho_m\left(e^{tX_+}\right) z_1^k z_2^{m-k} = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, \rho_m \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_1^k z_2^{m-k}$$

$$= \frac{d}{dt}|_{t=0}\, (z_1)^k (z_2 - t z_1)^{m-k} = -z_1^k (m-k)\, z_2^{m-k-1} z_1$$

und

$$\Pi_m(X_-) z_1^k z_2^{m-k} = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, \rho_m\left(e^{tX_-}\right) z_1^k z_2^{m-k} = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, \rho_m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} z_1^k z_2^{m-k}$$

$$= \frac{d}{dt}|_{t=0}\, (z_1 - t z_2)^k (z_2)^{m-k} = -k z_1^{k-1} z_2^{m-k+1}.$$

Wir setzen nun

$$v_k = (-1)^k \frac{m!}{(m-k)!} z_1^{m-k} z_2^k.$$

Dann ist $\Pi_m(H) v_k = (m-2k) v_k, \Pi_m(X_-) v_k = v_{k+1}, \Pi_m(X_+) v_k = k(m-k+1) v_{k-1}$. Also ist $\Pi_m = \pi_m$. *QED*

Wir erwähnen noch das Clebsch-Gordan-Theorem: es gibt einen Isomorphismus von Darstellungen $V_m \otimes V_n = V_{m+n} \oplus V_{m+n-2} \oplus \ldots \oplus V_{m-n+2} \oplus V_{m-n}$.

Übungsaufgaben 11 *:*

1. Zeigen Sie: $Tr\left(\rho_m \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}\right) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$ mit $2\cos\theta = z + \overline{z}$.

2. Zeigen Sie (ohne Benutzung des Clebsch-Gordan-Theorems): $Tr(\rho_m(A))\, Tr(\rho_n(A)) = Tr(\rho_{m+n}(A)) + Tr(\rho_{m+n-2}(A)) + \ldots + Tr(\rho_{m-n}(A))$ für alle $A \in SU(2)$. (Hinweis: es gibt eine bekannte Formel für $\sum_{l=0}^k \sin(\alpha + l\beta)$.)

3.5 Darstellungstheorie und Analysis

Eine typische Anwendung der Darstellungstheorie ist das Ausnutzen von Symmetrien zur Bestimmung der Lösung von Differentialgleichungen. Wenn nämlich eine Differentialgleichung invariant bezüglich der Wirkung einer Lie-Gruppe G ist, dann ist der Raum ihrer Lösungen eine Darstellung von G. Wenn man alle Darstellungen von G kennt, kann man versuchen, daraus die möglichen Lösungen zu bestimmen. Wir wollen diesen Aspekt aber nicht vertiefen und nur am Beispiel der Ergodentheorie einen typischen Zusammenhang zwischen Darstellungstheorie und Analysis erklären.

Fourier-Theorie. Wir betrachten $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ mit dem üblichen Lebesgue-Maß. Der Raum der quadratisch-integrierbaren Funktionen

$$L^2(\mathbb{T}^n) := \left\{ f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C} : \int_{\mathbb{T}^n} | f |^2 < \infty \right\}$$

ist ein (unendlich-dimensionaler) Vektorraum. Wir werden im folgenden zwei L^2-Funktionen als gleich ansehen, wenn sie fast überall übereinstimmen. $L^2(\mathbb{T}^n)$ ist also eigentlich der Vektorraum der Äquivalenzklassen.

Sei $G = \mathbb{T}^n$. Die Darstellung $\rho : \mathbb{T}^n \to Aut\left(L^2(\mathbb{T}^n)\right)$ ist definiert durch

$$\rho([y])(f) : [x] \to f([x] + [y]).$$

Insbesondere gilt

$$\rho([y])\left(e^{2\pi i<m,[x]>}\right) = e^{2\pi i<m,[y]>} e^{2\pi i<m,[x]>}.$$

Der von $e^{2\pi i<m,[x]>}$ aufgespannte 1-dimensionale Untervektorraum von $L^2(\mathbb{T}^n)$ ist also invariant. Wie man leicht sieht, ist er isomorph zu der Darstellung ρ_m aus Beispiel 23.

Aus der Fourier-Theorie wissen wir, dass sich jedes $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ in eine Fourier-Reihe entwickeln lässt:

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{2\pi i<m,x>}$$

mit $\sum | a_i |^2 = \int_{\mathbb{T}^n} | f |^2$ (Parseval-Gleichung). Dies ist genau die Zerlegung von $L^2(\mathbb{T}^n)$ in die irreduziblen Summanden für die Darstellung ρ.

Darstellungstheorie und Ergodentheorie. Sei $G = GL(n, \mathbb{Z})$. Die Darstellung $\rho : G \to Aut\left(L^2(\mathbb{T}^n)\right)$ ist definiert durch

$$\rho(A)(f) := A^* f$$

mit

$$A^* f([x]) := f([Ax])$$

für $A \in G, f \in L^2(\mathbb{T}^n), [x] \in \mathbb{T}^n$. Insbesondere ist $\rho(A)\left(e^{2\pi i<m,[x]>}\right) : x \to e^{2\pi i<A^T m,[x]>}$. Offensichtlich ist der Unterraum der konstanten Funktionen ein invarianter 1-dimensionaler Unterraum.

Sei X ein Raum mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß. Eine Abbildung $f : X \to X$ heißt ergodisch, wenn jede (meßbare) invariante Menge $Y \subset X$ entweder Mass 0 oder

Mass 1 hat. (Eine Menge Y heisst invariant wenn $f(Y) = Y, f^{-1}(Y) = Y$ gilt.) Als eine typisches Beispiel darstellungstheoretischer Methoden in der Analysis wollen wir das folgende Lemma beweisen.

Lemma 21 *: Sei $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ und $f_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ die induzierte Abbildung. Dann sind äquivalent:*
(i) die konstanten Funktionen sind der einzige eindimensionale invariante Unterraum der durch $\rho(n)(g) := (f_A^n)^* g$ gebenen Darstellung $\rho : \mathbb{Z} \to End\left(L^2(\mathbb{T}^n)\right)$,
(ii) f_A ist ergodisch,
(iii) kein Eigenwert von A ist eine Einheitswurzel,
(iv) f_A ist Anosovsch.

Beweis: (i)$\Longleftrightarrow$(ii): Wenn f_A nicht ergodisch ist, dann gibt es eine invariante Menge Y. Dann ist χ_Y nicht (fast überall) konstant, aber der von χ_Y aufgespannte 1-dimensionale Vektorraum ist invariant. Umgekehrt, wenn es einen 1-dimensionalen invarianten Vektorraum V gibt, sei $g \in V$ eine nicht-konstante Funktion. Dann ist $f_A^* g = cg$. Weil f_A wegen $det(A) = 1$ volumen-erhaltend ist, muss sogar $f_A^* g = g$ sein. Damit sind insbesondere die Mengen $U_c = \{x \in X : g(x) < C\}$ invariant. Weil g nicht fast überall konstant ist, können diese Mengen nicht alle Maß 0 oder 1 haben. Also ist f_A nicht ergodisch.

(ii)$\Longleftrightarrow$(iii): Angenommen, f_A ist nicht ergodisch. Dann gibt es eine invariante Menge Y. Die charakteristische Funktion χ_Y ist eine L^2-Funktion wegen $\int \mid \chi_Y(x) \mid^2 dx = vol(Y)$. Also gibt es eine Fourier-Zerlegung

$$\chi_Y(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{2\pi i <m,x>}.$$

Wegen der Invarianz von Y gilt $\chi_Y(Ax) = \chi_Y(x)$ für alle $x \in \mathbb{T}^2$, also $\rho(A)\chi_Y = \chi_Y$. Wegen $\rho(A)\left(e^{2\pi i <m,[x]>}\right) : x \to e^{2\pi i <A^T m,[x]>}$ folgt daraus

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{2\pi i <m,x>} = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{2\pi i <A^T m,x>},$$

also

$$a_m = a_{A^T m} \quad \forall m \in \mathbb{Z}^n.$$

Sei $a_m \neq 0$ mit $m \neq 0$. Dann sind, mit $B = A^T$, auch alle $a_{B^n m}$ nicht Null und genau so groß wie a_m. Wegen $\sum \mid a_i \mid^2 < \infty$ ist dies nur möglich, wenn es *nicht* unendlich viele verschiedene $a_{B^n m}$ mit $n \in \mathbb{N}$ gibt, d.h. wenn $B^n m = m$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Damit folgt dann aber (wegen $m \neq 0$), dass 1 ein Eigenwert von B^n ist. Ein Eigenwert von $B = A^T$ muß also eine Einheitswurzel gewesen sein.

Umgekehrt, sei $m \in \mathbb{Z}^2$ ein Eigenvektor von $B = A^T$ zum Eigenwert λ mit $\lambda^n = 1$. Dann ist $\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i <B^k m,x>}$ eine nicht-konstante A-invariante Funktion. Wie im Beweis von $ii) \Rightarrow i)$ folgt, dass es eine invariante Menge von Maß $not = 0, 1$ gibt. Also ist ρ nicht irreduzibel und f_A nicht ergodisch.

(iii)$\Longleftrightarrow$(iv) folgt aus dem Beweis von Satz 5: für $\mid Tr(A) \mid < 2$ hatten wir dort gezeigt, dass f_A Anosovsch ist, für $\mid Tr(A) \mid \leq 2$ hatten wir nachgerechnet, dass die Eigenwerte Einheitswurzeln sind.

QED

4 Riemannsche Geometrie

4.1 Definitionen

Definition 38 *: Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M mit einem differenzierbar von p abhängenden Skalarprodukt $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ für alle $p \in M$. $g = \{g_p\}_{p\in M}$ heißt Riemannsche Metrik.*

Differenzierbare Abhängigkeit meint folgendes: sei $\phi_k : U_k \to \mathbb{R}^n$ eine Karte um p, dann können wir für jedes Paar (i,j) eine Funktion $g_{ij} : \phi_k(U_k) \to \mathbb{R}$ definieren durch $g_{ij}(\phi_k(x)) := g_x\left(D\phi_k^{-1}(e_i), D\phi_k^{-1}(e_j)\right)$. Differenzierbarkeit von p heißt, dass (für jedes k) alle g_{ij} differenzierbar sind.

Beispiel 24 *: Falls $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit ist, kann man $g_p(X,Y) = < X, Y >$ für alle $X, Y \in T_pM \subset \mathbb{R}^n$ wählen. (Im Fall von Flächen im $\mathbb{R}^3$ nennt man g auch die erste Fundamentalform.)*

Als nächstes wollen wir die aus dem $\mathbb{R}^n$ bekannte Richtungsableitung auf Mannigfaltigkeiten verallgemeinern.

Zunächst betrachten wir im $\mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld X und ein Vektorfeld (d.h. ein n-Tupel von Funktionen) Y. Wir definieren dann $\nabla_X Y := D_X Y$ als die übliche Richtungsableitung.

Wenn wir nun eine Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ betrachten, können wir zu zwei Vektorfeldern X und Y auf M natürlich wieder die Richtungsableitung $D_X Y$ betrachten. Das ist im allgemeinen aber kein Vektorfeld auf M: für $p \in M$ kann die Richtungsableitung $D_X Y(p)$ i.A. ein beliebiger Vektor des $\mathbb{R}^n$ sein, sie muß nicht in T_pM sein.

Wir betrachten deshalb, zu jedem $p \in M$ die Zerlegung $T_p\mathbb{R}^n = T_pM \oplus N_pM$ mit $N_pM = \{v \in T_p\mathbb{R}^n : g(v,w) = 0 \ \forall w \in T_pM\}$ dem Normalraum. Die orthogonale Projektion (bzgl. des Skalarprodukts g_p) $P_p : \mathbb{R}^n \to T_pM$ ist dann die lineare Abbildung mit $P_p(w) = w$ für $w \in T_pM$ und $P_p(v) = 0$ für $v \in N_pM$. Wir definieren $\nabla_X Y(p) := P_p(D_X Y(p))$ (für jeden Punkt $p \in M$). Wir werden sehen, dass dies gerade den Levi-Civita-Zusammenhang auf M definiert.

Beispiel 25 *: Für eine Kurve $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $X = (\dot{c}_1, \dot{c}_2)$ ist $D_X X = (c_1'', c_2'')$ und dies ist, im allgemeinen, nicht tangential zu c.*

Wir wollen nun einen allgemeinen Begriff von Richtungsableitungen definieren.

Definition 39 *: Ein Zusammenhang auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist eine Abbildung $\nabla : Vect(M) \times Vect(M) \to Vect(M)$, bezeichnet mit $(X,Y) \to \nabla_X Y$, die* *folgende Bedingungen erfüllt:*

$$\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$$

$$\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f) Y$$

für beliebige Vektorfelder X, Y, Z und differenzierbare Funktionen f, g. Hierbei bezeichnet $X(f)$ die Richtungsableitung der differenzierbaren Funktion f nach X.

Definition 40 *: Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein Zusammenhang ∇ heißt Levi-Civita-Zusammenhang, wenn gilt:*

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

für alle Vektorfelder X, Y, Z. Hierbei bezeichnet g die Riemannsche Metrik und $X(g(Y, Z))$ die Richtungsableitung der Funktion $g(Y, Z)$ nach X.

Lemma 22 *: Auf jeder Riemannschen Mannigfaltigkeit gibt es einen eindeutig bestimmten Levi-Civita-Zusammenhang ∇^{LC}.*

Beweis: : Man rechnet nach, dass aus den Voraussetzungen für beliebige Vektorfelder X, Y, Z folgt:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(X; Z)) - Z(g(X, Y)) - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]).$$

(Diese Formel heißt Koszul-Formel.)
Sei $p \in M$. Wenn man für Z die verschiedenen Vektoren einer Basis von T_pM in diese Formel einsetzt, sieht man, dass man die Skalarprodukte von $\nabla_X Y(p)$ mit den Elementen einer Basis von T_pM berechnen kann. Damit ist $\nabla_X Y(p)$ eindeutig bestimmt.

Andererseits kann man $\nabla_X Y$ durch die Koszul-Formel definieren und prüft dann leicht nach, dass es alle gewünschten Eigenschaften hat. *QED*

Korollar 6 *: Für Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^n$ gilt: $\nabla_X^{LC} Y = P(D_X Y)$, wobei $P: T\mathbb{R}^n \to TM$ die punktweise orthogonale Projektion für $p \in M$ bezeichnet.*

Beweis: : Wegen der in Lemma 11 gezeigten Eindeutigkeit genügt es, zu zeigen, dass $P(D_X Y)$ die Bedingungen aus Definition 40 erfüllt. (Die Bedingungen aus Definition 39 sind eine offensichtliche Konsequenz aus den Rechenregeln für D und der Linearität von P.)

Zunächst bemerken wir, dass die Gleichungen aus Definition 40 für die Richtungsableitung im $\mathbb{R}^n$ erfüllt sind: die erste Gleichung folgt aus der Formel für den Kommutator in lokalen Koordinaten (Lemma 8) und die zweite Gleichung aus der Leibnizregel.

Wir bezeichnen $II(X, Y) = D_X Y - P(D_X Y)$. (Dies ist ein normaler Vektor, d.h. er steht senkrecht auf T_pM. Für Flächen im $\mathbb{R}^3$ ist $\pm \mid II(X, Y) \mid$ die zweite Fundamentalform.) Wir zeigen zunächst, dass II symmetrisch ist. Dafür müssen wir zeigen, dass für jeden Normalenvektor N gilt: $< D_X Y, N > = < D_Y X, N >$. Wenn wir N lokal zu einem Normalen-Vektorfeld fortsetzen, ist $< X, N > \equiv 0$ und $< Y, N > \equiv 0$, also $< D_X Y, N > + < Y, D_X N > \equiv 0$ und $< D_Y X, N > + < X, D_Y N > \equiv 0$. Die Behauptung ist also äquivalent zu der Behauptung, dass $< X, D_Y N > = < Y, D_X N >$ ist. Es genügt diese Behauptung für Koordinaten-Vektorfelder $X = D\phi^{-1}(e_i), Y = D\phi^{-1}(e_j)$ nachzuprüfen. Wegen $\frac{\partial}{\partial e_j} < \frac{\partial}{\partial e_i}\phi^{-1}, N > = 0$ ist dort $< X, \nabla_Y N > = < \frac{\partial}{\partial e_j}\frac{\partial}{\partial e_i}\phi^{-1}, N >$, womit die Behauptung aus dem Schwarz-Lemma folgt.

Aus der Symmetrie von $II(X,Y)$ folgt dann, dass die erste Gleichung aus Definition 40 auch für $P(D_X Y)$ erfüllt ist. Für die zweite Gleichung aus Definition 40 bemerken wir, dass nur auf der rechten Seite $g(II(X,Y), Z) + g(Y, II(X,Z))$ addiert, was aber Null ist, weil Tangentialvektoren auf Normalenvektoren senkrecht stehen. QED

Wir werden in dieser Vorlesung nur den Levi-Civita-Zusammenhang ∇^{LC} betrachten und ihn immer mit ∇ bezeichnen.
Falls wir lokale Koordinaten gegeben haben, hat man $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$ mit $\Gamma_{ij}^k \in \mathbb{R}$. Diese Koeffizienten heissen die Christoffel-Symbole des Zusammenhangs.
Aus den Gleichungen in Definition 39 folgt für $X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y = \sum Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, dass $\nabla_X Y = \sum X_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum X_i \left(\frac{\partial Y_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} + Y_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{ijk} X_i \frac{\partial Y_k}{\partial x_i} + X_i Y_j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$.
Im folgenden bezeichnen wir $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ und mit g^{ij} den ij-Eintrag der Matrix g^{-1}.

Lemma 23 *: Es gilt* $2\Gamma_{ij}^k = \sum_{l=1}^n g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right)$.

Beweis: Weil die Kommutatoren $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$ verschwinden, vereinfacht sich die Koszulformel zu $2g\left(D_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right) = \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}$. Daraus folgt die Behauptung. QED

Wir bemerken noch, dass für eine gegebene Kurve γ mit $\dot{\gamma} \equiv X$ und $\gamma(0) = p$ der Wert $\nabla_X Y(p)$ nur von $X(p), Y(p)$ und den Ableitungen $\frac{dY_i(\gamma(t))}{dt}$ abhängt. Deshalb ist $\nabla_{\dot{\gamma}} Y$ wohldefiniert, unabhängig davon, wie man $\dot{\gamma}$ außerhalb des Bildes von γ zu einem Vektorfeld fortsetzt.

Definition 41 *: Sei Y ein Vektorfeld auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit und $\gamma : \mathbb{R} \to M$ eine differenzierbare Kurve. Man sagt, dass Y parallel entlang γ ist (oder dass $Y(\gamma(t))$ aus $Y(\gamma(0))$ durch Parallelverschiebung entlang γ hervorgeht), wenn $\nabla_{\dot{\gamma}} Y \equiv 0$ ist.*

Die Länge eines Vektors $Y(p)$ ist definiert als $\| Y(p) \| = g(Y(p), Y(p))^{\frac{1}{2}}$.

Lemma 24 *: Wenn das Vektorfeld Y parallel entlang der differenzierbaren Kurve γ ist, dann ist $\| Y(\gamma(t)) \| = \| Y(\gamma(0)) \|$ für alle t.*

Beweis: Es ist $\frac{d}{dt} g(Y(\gamma(t)), Y(\gamma(t))) = \dot{\gamma} g(Y(\gamma(t)), Y(\gamma(t))) = 2g(\nabla_{\dot{\gamma}} Y, Y) = 0$. QED

Definition 42 : *Eine Geodäte auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M ist eine Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to M$ für die $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} \equiv 0$ gilt.*

In lokalen Koordinaten ergibt dies das System gewöhnlicher Differentialgleichungen $\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0$ für $1 \leq k \leq n$.

Beispiel 26 : *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit mit $g(X,Y) = < X, Y >$. Dann ist γ eine Geodäte gdw. für alle t die zweite Ableitung $\gamma''(t)$ normal zu M ist.*

Sei M kompakt (und ohne Rand). Aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Systeme gewöhnliche Differentialgleichungen folgt, dass es zu jedem Punkt $p \in M$ und jedem Tangentialvektor $v \in T_pM$ eine eindeutig bestimmte Geodäte $\gamma_v : \mathbb{R} \to M$ mit $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v$ gibt.

Die Exponentialabbildung $exp : T_pM \to M$ ist definiert durch $exp(v) := \gamma_v(1)$. Aus dem Satz über inverse Funktionen folgt, dass exp ein lokaler Diffeomorphismus ist.

Bemerkung: man kann zeigen, dass in einer hinreichend kleinen Umgebung jedes Punktes die Geodäten die kürzesten Verbindungen zwischen Punkten sind. (Hierbei ist die Länge einer Kurve definiert als $l(\gamma) = \int_a^b g(\gamma'(t), \gamma'(t))^{\frac{1}{2}} dt$.)

Beispiel 27 : *Sei $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\}$ mit der Riemannschen Metrik $g_{(x,y)}((v_1,v_2),(w_1,w_2)) = \frac{1}{y^2}(v_1w_1 + v_2w_2)$, die hyperbolische Ebene. Die Geodäten sind die Halbgeraden und Halbkreise, die auf der x-Achse senkrecht stehen.*

Beweis: Es ist $g_{11} = \frac{1}{y^2}, g_{12} = g_{21} = 0, g_{22} = \frac{1}{y^2}$, bis auf $\frac{\partial g_{11}}{\partial y} = \frac{\partial g_{22}}{\partial y} = \frac{-2}{y^3}$ verschwinden also alle Ableitungen der Metrik. Die einzigen von Null verschiedenen Christoffel-Symbole sind dann $\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}, \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}$. Die Geodätengleichungen lauten

$$x'' - \frac{2}{y}x'y' = 0,$$

$$y'' - \frac{1}{y}(y')^2 + \frac{1}{y}(x')^2 = 0.$$

Es ist klar, dass die Halbgeraden $(x(t), y(t)) = (x_0, e^t)$ Lösungen dieser Differentialgleichungen. Die Halbkreise $(x(t), y(t)) = \left(r_0 \tanh t + x_0, \frac{r}{\cosh t}\right)$ sind ebenfalls Lösungen, wie man durch Einsetzen feststellt. Nach dem Eindeutigkeitssatz kann es keine weiteren Geodäten geben. (Durch einen Vektor an einem Punkt gibt es einen eindeutigen Kreis, bzw. Gerade, der senkrecht auf der x-Achse ist.) *QED*

Übungsaufgaben 12 : *Die n-dimensionale Sphäre ist*

$$\mathbb{S}^n = \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\right\}$$

mit der Riemannschen Metrik

$$g((v_1, \ldots, v_{n+1}), (w_1, \ldots, w_{n+1})) = v_1w_1 + \ldots + v_nw_n + v_{n+1}w_{n+1}$$

für $(v_1, \ldots, v_{n+1}), (w_1, \ldots, w_{n+1}) \in T_x\mathbb{S}^n \subset T_x\mathbb{R}^{n+1}$.
Der n*-dimensionale hyperbolische Raum ist*

$$\mathbb{H}^n = \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \ldots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1, x_{n+1} > 0\right\}$$

mit der Riemannschen Metrik

$$h\left((v_1, \ldots, v_{n+1}), (w_1, \ldots, w_{n+1})\right) = v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n - v_{n+1} w_{n+1}$$

für $(v_1, \ldots, v_{n+1}), (w_1, \ldots, w_{n+1}) \in T_x\mathbb{H}^n \subset T_x\mathbb{R}^{n+1}$.
1. Zeigen Sie, dass g *und* h *tatsächlich Riemannsche Metriken sind.*
Hinweis: $T_x\mathbb{H}^n = \left\{v \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n - x_{n+1} v_{n+1} = 0\right\}$.
2. Wir betrachten $\mathbb{S}^2$ *mit den lokalen Koordinaten* $(\phi_1, \phi_2) \rightarrow (\sin\phi_1 \sin\phi_2, \sin\phi_1 \cos\phi_2, \cos\phi_1)$ *und* $\mathbb{H}^2$ *mit den lokalen Koordinaten* $(\psi_1, \psi_2) \rightarrow (\sinh\psi_1 \sin\psi_2, \sinh\psi_1 \cos\psi_2, \cosh\psi_1)$.
Bestimmen Sie jeweils die Christoffel-Symbole.
Hinweis: Zeigen Sie, dass bzgl. dieser Koordinaten $g_{11} = 1, g_{12} = 0, g_{22} = \sin^2\phi_1$ *bzw.* $h_{11} = 1, h_{12} = 0, h_{22} = \sinh^2\psi_1$ *gilt.*
3. a) Bestimmen Sie die Geodäte $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2$ *mit* $\gamma(0) = (0,0,1), \gamma'(0) = (1,0,0)$.
b) Bestimmen Sie die Geodäte $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ *mit* $\gamma(0) = (0,0,1), \gamma'(0) = (1,0,0)$.

4.2 Krümmungsbegriffe

Definition 43 *: Sei* M *eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Der Riemannsche Krümmungstensor ist der durch*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

für $X, Y, Z \in Vect(M)$ *definierte* $(1,3)$*-Tensor. (D.h. je drei Vektorfeldern* X, Y, Z *wird ein Vektorfeld* $R(X,Y)Z$ *zugeordnet.)*

Definition 44 *: Sei* M *eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Riemannschem Krümmungstensor* R. *Seien* $X, Y \in T_pM$. *Dann definieren wir die Schnittkrümmung* $K(X,Y) \in \mathbb{R}$ *als*

$$K(X,Y) := \frac{1}{g(X,X)\,g(Y,Y) - g(X,Y)^2}\, g(R(X,Y)Y, X),$$

die Ricci-Krümmung

$$Ric(X,Y) = Tr(Z \rightarrow R(Z,X)Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,X)Y, e_i)$$

für eine Orthonormalbasis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *von* T_pM, *und die Skalarkrümmung*

$$Scal = \sum_{i=1}^{n} Ric(e_i, e_i).$$

Beispiel 28 *: Die hyperbolische Ebene aus Beispiel 27 hat Schnittkrümmung* $\equiv -1$, *und damit* $Ric = -g$ *und* $Scal \equiv -2$.

Beispiel 29 *: Für beliebige Riemannsche Mannigfaltigkeiten ist* $Ric(X,X) = \sum_{i=1}^{n} K(e_i, X)$ *und* $Scal = \sum_{i,j=1}^{n} K(e_i, e_j)$*. (Man beachte, dass man damit auch* $Ric(X,Y)$ *berechnen kann: wie für jede symmetrische Bilinearform gilt:* $4Ric(X,Y) = Ric(X+Y, X+Y) - Ric(X-Y, X-Y)$*).*
Falls M *konstante Schnittkrümmung* K *hat, dann ist* $Ric = (n-1)Kg$ *und* $Scal = n(n-1)K$*.*

Wir wollen, ohne Beweis, die geometrische Bedeutung der Schnittkrümmung (den Satz von Jacobi) erklären. Sei γ_t eine 1-Parameter-Familie von Geodäten durch p, d.h. für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $\gamma_t : \mathbb{R} \to M$ eine Geodäte mit $\gamma_t(0) = p$ (und $\gamma_t(s)$ hängt differenzierbar von t ab, durch $H(s,t) := \gamma_t(s)$ haben wir also eine differenzierbare Abbildung $H : \mathbb{R}^2 \to M$ definiert). Wir definieren das Variationsvektorfeld auf dem Bild von γ_0 als

$$Y(\gamma_0(s)) = \frac{\partial}{\partial t} H(s,0).$$

Dann gilt die Jacobi-Gleichung

$$g(Y'', Y) = -K(\gamma_0', Y).$$

Man kann also sagen, dass die Schnittkrümmung mißt, mit welcher Geschwindigkeit sich Geodäten auseinander bewegen. Insbesondere hat man: für $K \equiv 1$ ist $\mid Y(t) \mid = \sin t$, für $K \equiv 0$ ist $\mid Y(t) \mid = t$, für $K \equiv -1$ ist $\mid Y(t) \mid = \sinh t$.

Die geometrische Interpretation der Ricci-Krümmung ist weniger evident. Sie bestimmt zwar nicht, mit welcher Geschwindigkeit Geodäten auseinander streben, aber immerhin noch, wie schnell das Volumen der Kugeln vom Radius r wächst. Ihre ursprüngliche Bedeutung liegt aber darin, dass sie in der Relativitätstheorie die Gravitation beschreibt. Einige Konstruktionen von Einstein-Mannigfaltigkeiten werden wir in Kapitel 6 geben. Eine andere wichtige Anwendung der Ricci-Krümmung, auf die wir hier natürlich nicht eingehen werden, ist Perelman's angekündigter Beweis der Poincare-Vermutung.

Ein zentrales Forschungsthema in der Differentialgeometrie, auf das wir in dieser Vorlesung nicht eingehen können, ist es, Zusammenhänge zwischen den topologischen Eigenschaften einer Mannigfaltigkeit und den möglichen Werten für die Krümmung zu bestimmen. Wir wollen dies nur kurz am Beispiel von Flächen veranschaulichen. Sei S eine kompakte, orientierbare Fläche. Aus der Topologie weiß man, daß es ein $g \in \mathbb{N}$ gibt, so dass S aus der $\mathbb{S}^2$ durch Ankleben von g Henkeln entsteht. Aus der Differentialgeometrie kennt man das Gauß-Bonnet-Theorem, welches besagt, dass für die Schnittkrümmung K einer beliebigen Metrik gilt:

$$\frac{1}{4\pi} \int_S K = 2 - 2g.$$

Also kann es eine Metrik positiver Schnittkrüumung nur für $g = 0$ und eine Metrik negativer Schnittkrümmung nur für $g \geq 2$ geben. Tatsächlich weiß man, dass es auf der Sphäre eine Metrik mit $K \equiv 1$, auf dem Torus eine Metrik mit $K \equiv 0$ und auf allen S_g mit $g \geq 2$ eine Metrik mit $K \equiv -1$ gibt. (Nach einem Satz von Hilbert lassen sich für $g \geq 1$ Metriken konstanter Krümmung aber nur durch Einbettungen $S \subset \mathbb{R}^n$ mit $n > 3$ finden.)

Übungsaufgaben 13 *: Bestimmen Sie Schnittkrümmungen, Ricci-Krümmungen und Skalarkrümmungen von* $\mathbb{S}^2$ *und* $\mathbb{H}^2$ *(mit den Riemannschen Metriken aus Übung 12).*

4.3 Krümmung von Lie-Gruppen

Definition 45 *: Sei G eine Lie-Gruppe. Eine Riemannsche Metrik g heißt links-invariant, wenn $g(v,w) = g(Dl_h(v), Dl_h(w))$ für alle $h \in G$ und $v, w \in T_pG, p \in G$ gilt.*

Lemma 25 *: Sei G eine Lie-Gruppe und g_0 ein Skalarprodukt auf der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Dann gibt es auf G eine eindeutige links-invariante Riemannsche Metrik g mit $g|_{T_eG} = g_0$.*

Beweis: Für $v, w \in T_hG$ ist $g(v,w)$ eindeutig festgelegt durch die Bedingung $g(v,w) = g_0(Dl_{h^{-1}}v, Dl_{h^{-1}}w)$. *QED*

Im folgenden betrachten wir eine links-invariante Riemannsche Metrik auf G, den zu dieser Metrik eindeutig bestimmten Levi-Civita-Zusammenhang ∇ und dessen Krümmungstensor R. Mit $g(.,.)$ sind auch ∇ und R invariant unter der Wirkung von G. (Das folgt aus der Formel für den Levi-Civita-Zusammenhang und $[Dl_hY, Dl_hZ] = Dl_h[Y,Z]$.)

Wir wollen einfache Ausdrücke für ∇, R und die Schnittkrümmung finden.
Im folgenden sind X, Y, Z **links-invariante** Vektorfelder.
Wegen der Links-invarianz der Riemannschen Metrik g haben wir

$$0 = Xg(Y,Z),$$

denn aus Links-invarianz von Y, Z und g folgt, dass $g(Y,Z)$ eine konstante Funktion ist, analog für die zyklischen Vertauschungen von X, Y, Z. Damit vereinfacht sich die Koszul-Formel zu $2g(\nabla_XY, Z) = g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y)$. Insgesamt erhalten wir also wir also folgende Formel für den **Zusammenhang links-invarianter Vektorfelder**:

$$2\nabla_XY = [X,Y] - ad(X)^*Y - ad(Y)^*X. \tag{1}$$

Um eine Formel für $R(X,Y) = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$ herzuleiten, benutzen wir wieder, daß für links-invariante Vektorfelder

$$Xg(\nabla_YZ, W) = 0$$

gilt, woraus mit der Leibniz-Regel $g(\nabla_X\nabla_YZ, W) = -g(\nabla_YZ, \nabla_XW)$ und entsprechend $-g(\nabla_Y\nabla_XZ, W) = g(\nabla_XZ, \nabla_YW)$ folgt. Durch Aufsummieren erhält man

$$g(R(X,Y)Z, W) = \tag{2}$$

$$g(\nabla_XZ, \nabla_YW) - g(\nabla_YZ, \nabla_XW) - g\left(\nabla_{[X,Y]}Z, W\right).$$

Wenn wir eine Orthonormalbasis $\{X, Y\}$ von T_eG wählen, erhalten wir $K(X,Y) = g(\nabla_XY, \nabla_YX) - g(\nabla_YY, \nabla_XX) - g\left(\nabla_{[X,Y]}Y, X\right)$, was man durch Einsetzen von Gleichung (1) berechnen kann.

4.4 Biinvariante Metriken

Wir betrachten in diesem Abschnitte Lie-Gruppen mit einer bi-invarianten Riemannschen Metrik. Wegen des folgenden Lemmas schließt das alle kompakten Lie-Gruppen ein.

Lemma 26 *: a) Sei G eine Lie-Gruppe mit einem Ad-invarianten Skalarprodukt auf $\mathfrak{g}$. Dann gibt es auf G eine bi-invariante Riemannsche Metrik.*
b) Sei G eine kompakte Lie-Gruppe mit Killingform B. Dann ist durch $g(X_h, Y_h) := -B(DL_{h^{-1}}(X_h), (DL_{h^{-1}}(Y_h))$ eine bi-invariante Riemannsche Metrik auf G definiert.

Beweis: Sei $< .,. >$ ein Ad-invariantes Skalarprodukt. Für $h \in G$ definieren wir dann $g_h(X, Y) =< Dl_h^{-1} X, Dl_h^{-1} Y >$. Dies ist nach Definition links-invariant und die Rechts-Invarianz folgt genau aus der Ad-Invarianz von $< .,. >$. (Es gilt nämlich $Ad(h) = Dr_h \circ Dl_h^{-1}$, für links-invariante Vektorfelder ist $Ad(h)$-Invarianz also äquivalent zu Dr_h-Invarianz.)

Für eine kompakte Lie-Gruppe G mit Killingform B ist nach Proposition 15 und Satz 6 $-B$ ein Ad-invariantes Skalarprodukt auf $\mathfrak{g}$. Deshalb folgt b) aus a). *QED*

Der folgende Satz zeigt, dass man für bi-invariante Metriken auf Lie-Gruppen die Krümmung direkt aus den algebraischen Eigenschaften der Lie-Algebra erhält.

Satz 8 *: Sei G eine Lie-Gruppe mit einer bi-invarianten Riemannschen Metrik. Dann ist*

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$$

$$K(X, Y) = \frac{1}{4} \parallel [X, Y] \parallel^2$$

$$Ric(X, X) = \frac{1}{4} \sum_{i=2}^{n} \parallel [X, e_i] \parallel^2$$

$$Scal = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{n} \parallel [e_i, e_j] \parallel^2 .$$

(In der Formel für $K(X, Y)$ haben wir angenommen, dass X und Y orthonormal sind. $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ist eine ON-Basis mit $X = e_1$. $Ric(X, Y)$ kann man mit $4Ric(X, Y) = Ric(X + Y, X + Y) - Ric(X - Y, X - Y)$ berechnen.)
Insbesondere hat G eine Metrik mit nichtnegativer Schnitt-Krümmung.

Beweis: Wir wenden die Formeln aus dem vorigen Abschnitt an. Für bi-invariante Metriken auf G kann man diese Formeln deutlich vereinfachen.

Bi-invarianz der Metrik heißt, dass $Ad(h)$ orthogonal (bzgl. der Metrik). ist. Die Lie-Algebra der orthogonalen Matrizen sind die schiefsymmetrischen Matrizen. $ad(h)$ ist also (bzgl. der Metrik) schiefadjungiert, d.h. $ad^* = -ad$. Damit ist $ad(X)^* Y + ad(Y)^* X = -ad(X) Y - ad(Y) X = -[X, Y] - [Y, X] = 0$. Aus Gleichung (1) folgt

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]. \tag{3}$$

Damit erhalten wir $K(X, Y) = g(\nabla_X Y, \nabla_Y X) - g(\nabla_Y Y, \nabla_X X) - g(\nabla_{[X,Y]} Y, X) = \frac{1}{4} g([X, Y], [Y, X]) - \frac{1}{4} g([Y, Y], [X, X]) - \frac{1}{2} g([[X, Y], Y], X)$. Der zweite Summand ist Null, der dritte Summand ist $\frac{1}{2} g(ad(Y)[X, Y], X) = -\frac{1}{2} g([X, Y], ad(Y)^* X) = -\frac{1}{2} g([X, Y], [Y, X])$. Insgesamt erhalten wir also

$$g(R(X,Y)Y,X) = \frac{1}{4} \| [X,Y] \|^2 . \tag{4}$$

QED

Beispiel 30 *: Für jede invariante Metrik auf T^n gilt $K \equiv 0$. (Auf einer abelschen Gruppe sind linksinvariante Metriken auch rechtsinvariant.)*

Beispiel 31 *: Für die durch die Killingform gegebene Metrik auf $SU(2)$ ist $K \equiv 1$. Es gilt nämlich $-B(X,Y) = -4Tr(XY)$, also $\| X \|^2 = -4Tr(X^2)$ woraus für die ON-Basis $\frac{1}{\sqrt{8}}iH, \frac{1}{\sqrt{8}}X, \frac{1}{\sqrt{8}}Y$ aus Abschnitt 3.4, mit $[iH,X] = 2Y, [iH,Y] = -2X, [X,Y] = 2iH$, folgt dass $K(iH,Y) = \frac{1}{32} \| -2X \|^2 = -\frac{1}{2}Tr(X^2) = 1, K(iH,X) = \frac{1}{32} \| 2Y \|^2 = -\frac{1}{2}Tr(Y^2) = 1, K(X,Y) = \frac{1}{32} \| iH \|^2 = -\frac{1}{2}Tr(-H^2) = 1$. (Tatsächlich kann man zeigen, dass diese Metrik isometrisch zur Sphäre von Radius 1 ist.)*

4.5 Isometriegruppen

Definition 46 *: Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein Diffeomorphismus $f : M \to M$ heißt Isometrie, wenn $g(Df(v), Df(w)) = g(v,w)$ für alle $v, w \in T_pM, p \in M$ gilt. Wir bezeichnen $Isom(M) = \{f : M \to M \text{ Isometrie }\}$.*

Man prüft leicht nach, dass $Isom(M)$ eine Gruppe ist.
Bemerkung: nach einem Satz von Myers-Steenrod ist $Isom(M)$ eine Lie-Gruppe für jede Riemannsche Mannigfaltigkeit M.

Lemma 27 *: Sei f eine Isometrie, γ eine Geodäte, dann ist $f \circ \gamma$ eine Geodäte.*

Beweis: Seien $\{x_1, \ldots, x_n\}$ lokale Koordinaten in einer Umgebung von p. Dann sind $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ Koordinatenvektorfelder um p und, weil f ein Diffeomorphismus ist, $\left\{Df\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \ldots, Df\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\right\}$ Koordinatenvektorfelder um $f(p)$.

Weil f eine Isometrie ist, läßt es nach Lemma 23 die Christoffel-Symbole bzgl. dieser Koordinatenvektorfelder invariant. Damit haben aber auch $\nabla_X X$ und $\nabla_{Df(X)} Df(X)$ bzgl. dieser Koordinatenvektorfelder die selben Koeffizienten. Insbesondere gilt für $Y = (f \circ \gamma)' = Df(\dot{\gamma})$ wieder $\nabla_Y Y = 0$. *QED*

Lemma 28 *: Sei M eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$. Seien f_1, f_2 zwei Isometrien mit $f_1(p) = f_2(p)$ und $D_p f_1 = D_p f_2$. Dann ist $f_1 \equiv f_2$.*

Beweis:

Weil f_1 eine Isometrie ist, bildet es Geodäten in Geodäten ab. Insbesondere ist also $f_1(exp(tv)) = exp\left(tD(f_1)_p(v)\right)$ für alle $v \in T_pM$, entsprechend für f_2. Daraus folgt aber, dass f_1 und f_2 auf einer offenen Umgebung von p übereinstimmen.

Sei nun $U = \{x \in M : f_1(x) = f_2(x), D_x f_1 = D_x f_2\}$. Das selbe Argument zeigt, dass jeder Punkt in U eine offene Umgebung in U hat. U ist also offen. Andererseits ist U offensichtliich abgeschlossen, denn aus $x_n \to x$ und $f_1(x_n) = f_2(x_n), D_{x_n} f_1 = D_{x_n} f_2$ folgt wegen Stetigkeit der Ableitungen natürlich auch $x \in U$. Weil M zusammenhängend ist, ist also $U = M$. *QED*

Man kann also $Isom(M)$ als Teilmenge von $T_1 M = \{(x, v_1, \ldots, v_n) : x \in M, v_i \in T_x M, \| v_i \| = 1\}$ auffassen, indem man für ein fest gewähltes $x_0 \in M$ und eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von $T_x M$ die nach Lemma 28 injektive Abbildung $f \to (f(x_0), D_{x_0} f(v_1), \ldots, D_{x_0} f(v_n))$ benutzt. Insbesondere ist $Isom(M)$ kompakt, wenn M kompakt ist.

Korollar 7 *: $Isom(\mathbb{S}^n) = O(n+1), Isom(\mathbb{H}^n) = O(n,1)$.*

Beweis: Man prüft leicht nach, dass alle Elemente von $O(n+1)$ Isometrien der $\mathbb{S}^n$ sind.

Wir betrachten $x = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$ und die Standard-ON-Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ von $T_x \mathbb{S}^n$. Jede Isometrie muss diese ON-Basis wieder auf eine ON-Basis abbilden. Um zu zeigen, dass jede Isometrie ein Element von $O(n+1)$ ist, genügt es nach Lemma 28 zu zeigen: sei $y \in \mathbb{S}^n$ und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine ON-Basis von $T_y \mathbb{S}^n$, dann gibt es ein $A \in O(n+1)$ mit $Ax = y$ und $Ae_i = v_i$.

Nun ist $T_y \mathbb{S}^n = \left\{ v \in \mathbb{R}^{n+1} :< y, v >= 0 \right\}$. Also ist $y, v_1, \ldots, v_n$ eine ON-Basis von $\mathbb{R}^{n+1}$. Deshalb ist die Matrix A mit Spaltenvektoren $v_1, \ldots, v_n, y$ ein Element $A \in O(n+1)$. Offensichtlich gilt $Ax = y$ und $Ae_i = v_i$, woraus die Behauptung folgt.

Der Beweis für $\mathbb{H}^n$ ist ähnlich. *QED*

Korollar 8 *: Auf Bogenlänge parametrisierte Geodäten in $\mathbb{S}^n$ sind von der Form $\gamma(t) = \cos tx + \sin tv$ mit $x \in \mathbb{S}^n, v \in T_x \mathbb{S}^n$. Auf Bogenlänge parametrisierte Geodäten in $\mathbb{H}^n$ sind von der Form $\gamma(t) = \cosh tx + \sinh tv$ mit $x \in \mathbb{H}^n, v \in T_x \mathbb{H}^n$.*

Beweis: Für $n = 1$ zeigt man die Behauptung leicht durch explizites Nachrechnen: sei $\gamma(t) = (\cos(s(t)), \sin(s(t)))$ eine Kurve in $\mathbb{S}^1$. Die Bedingung, dass γ'' normal zu $\mathbb{S}^1$ ist (und die Parametrisierung auf Bogenlänge) ergibt, dass $s(t) = t + b$ Mit $x = (\cos b, \sin b)$ und $v = (-sinb, \cos b)$ folgt die Behauptung. Der Beweis f ür $\mathbb{H}^1$ ist analog, wenn man $\sin, \cos$ durch $\sinh, \cosh$ ersetzt..

Sei $n \geq 2$. Sei E der zweidimensionale lineare Unterraum durch x und v. Dann gibt es Abbildungen $A \in O(n+1)$ mit $A(1,0,0,\ldots,0) = x, A(0,1,0,\ldots,0) = v$. $A^{-1}\gamma(t)$ ist nach Lemma 27 eine Geodäte. Sie liegt in $\mathbb{S}^1$, ist also von der Form $\cos t(1,0) + \sin t(0,1)$. Daraus folgt $\gamma(t) = \cos tx + \sin tv$. Der Beweis für $\mathbb{H}^n$ ist ähnlich.

QED

Orientierbarkeit. Sei V ein reeller Vektorraum. Zu je zwei Basen $\{e_1, \ldots, e_n\}$ und $\{f_1, \ldots, f_n\}$ gibt es $a_{ij} \in \mathbb{R}$ mit $f_i = \sum_j a_{ij} e_j$. Sei A die Matrix mit Einträgen a_{ij}. Wir sagen, dass beide Basen gleich orientiert sind, wenn $det(A) > 0$, und dass sie unterschiedlich orientiert sind, wenn $det(A) < 0$. Dies definiert eine Äquivalenzrelation mit genau zwei Äquivalenzklassen auf der Menge aller Basen eines gegebenen Vektorraumes.

Für $V=\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir die Elemente in der Äquivalenzklasse der Standardbasis als positiv orientiert, die anderen als negativ orientiert.

Sei M eine Mannigfaltigkeit. Wir sagen, dass ein Atlas $\{\phi_i\}$ orientierbar ist, wenn $D\left(\phi_i^{-1}\phi_j\right)$ in allen Punkten positive Determinante hat (für alle i,j). Für eine orientierbare Mannigfaltigkeit (Mannigfaltigkeit mit orientierbarem Atlas) sagen wir, dass eine Basis $v_1,\ldots,v_n$ von T_xM positiv/negativ orientiert ist, wenn für $x\in U_i$ gilt: $D_x\phi_iv_1,\ldots,D_x\phi_iv_n$ ist eine positiv/negativ orientierte Basis von $T_{\phi_i(x)}\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^n$. (Wegen der Orientierbarkeit des Atlas hängt das für $x\in U_i\cap U_j$ nicht davon ab, ob wir ϕ_i oder ϕ_j betrachten.)

Seien M,N orientierbare Mannigfaltigkeiten. Eine differenzierbare Abbildung $f: M\to N$ heißt orientierungs-erhaltend wenn, für alle $p\in M$, D_pf positiv/negativ orientierte Basen in positiv/negativ orientierte Basen abbildet. Mit $Isom^+(M)$ bezeichnen wir die Gruppe der orientierungs-erhaltenden Isometrien.

Beispiel 32 *:* $Isom^+(\mathbb{S}^n)=SO(n+1), Isom^+(\mathbb{H}^n)=SO(n,1)$.

Beispiel 33 *:* $Isom^+\left(\mathbb{H}^2\right)=PSL(2,\mathbb{R})$.

Beweis: Sei $\mathbb{H}^2$ die hyperbolische Ebene, d.h. $\{z\in\mathbb{C}: Im(z)>0\}$ mit der Riemannschen Metrik $g_z(v,w)=\frac{1}{Im(z)^2}(v_1w_1+v_2w_2)$. Wir zeigen, dass die Isometriegruppe isomorph zu $PSL(2,\mathbb{R})=SL(2,\mathbb{R})/\sim$ (mit $A\sim\pm A$) ist. Tatsächlich wirkt jede Matrix $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ durch $Az=\frac{az+b}{cz+d}$. Man rechnet nach, dass $DA_z=\frac{a(cz+d)-c(az+b)}{(cz+d)^2}=\frac{1}{(cz+d)^2}$ ist. Es gilt $Im(Az)=\frac{1}{|cz+d|^2}Im(z)$ wegen $Az-A\overline{z}=\frac{(ad-bc)(z-\overline{z})}{|cz+d|^2}$. Damit ist A eine Isometrie der hyperbolischen Metrik. Offensichtlich geben A und $-A$ dieselbe Isometrie. Wir müssen noch zeigen, dass jede Isometrie von dieser Form ist. Dafür genügt es wegen Lemma 28 (und weil eine ON-Basis von $T_z\mathbb{H}^2$ durch einen Vektor bereits festgelegt ist) die folgende Behauptung zu zeigen: seien $x+iy\in\mathbb{H}^2, v\in T_x\mathbb{H}^2$, dann gibt es ein $A\in SL(2,\mathbb{R})$ mit $Ai=x+iy, DA_i(0,1)=v$.

Wir bemerken zunächst, dass $SO(2)\subset SL(2,\mathbb{R})$ den Punkt i auf sich abbildet und man zu jedem $w\in T_i\mathbb{H}^2$ ein $K\in SO(2)$ findet, welches den Tangentialvektor $(0,1)$ auf w abbildet. Ferner kann man zu jedem Punkt $x+iy\in\mathbb{H}^2$ eine Matrix $B=\begin{pmatrix}\sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}}\end{pmatrix}$ angeben, die i auf $x+iy$ abbildet. Wenn wir nun $K\in SO(2)$ so wählen, dass es $(0,1)$ auf $w:=DB_{x+iy}^{-1}v$ abbildet, dann gilt mit $A=BK$, dass $A(i)=x+iy$ und $DA_i(0,1)=v$. *QED*

Übungsaufgaben 14 *: (***Modelle der hyperbolischen Ebene.***)*

Hyperboloid-Modell*:* $M=\left\{x\in\mathbb{R}^3: x_1^2+x_2^2-x_3^2=-1, x_3>0\right\}$ *mit der Riemannschen Metrik*

$$g_x((v_1,v_2,v_3),(w_1,w_2,w_3))=v_1w_1+v_2w_2-v_3w_3.$$

Scheiben-Modell*:* $N=\left\{x\in\mathbb{R}^2: x_1^2+x_2^2<1\right\}$ *mit der Riemannschen Metrik*

$$h_x((v_1,v_2),(w_1,w_2))=\frac{4}{\left(1-x_1^2-x_2^2\right)^2}(v_1w_1+v_2w_2).$$

Halbraum-Modell*: $O = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ mit der Riemannschen Metrik*

$$i_x\left(\left(v_1, v_2\right), \left(w_1, w_2\right)\right) = \frac{1}{x_2^2}\left(v_1 w_1 + v_2 w_2\right).$$

a) Zeigen Sie: die durch

$$F\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3}\right)$$

definierte Abbildung $F : M \to N$ ist eine Isometrie.
b) Zeigen Sie: die durch

$$G\left(x_1, x_2\right) = \left(2\frac{x_1}{x_1^2 + \left(x_2+1\right)^2}, 2\frac{x_2+1}{x_1^2 + \left(x_2+1\right)^2} - 1\right)$$

definierte Abbildung $G : N \to O$ ist eine Isometrie.

Weil die verschiedenen Modelle der hyperbolischen Ebene isometrisch sind, erhält man insbesondere einen Isomorphismus $SO(2,1) \simeq PSL(2, \mathbb{R})$.

5 Homogene Räume

5.1 Homogene Räume (topologisch)

Wir betrachten zunächst allgemein einen topologischen Raum M mit einer Äquivalenzrelation $\sim$. Wir bezeichnen mit $M/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen und mit $\pi : M \to M/\sim$ die kanonische Projektion. (D.h., wenn wir mit $[x]$ die Äquivalenzklasse von $x \in M$ bezeichnen, dann ist $\pi(x) = [x]$.) Auf $M/\sim$ definieren wir eine Topologie wie folgt: eine Menge $U \subset M/\sim$ sei offen genau dann, wenn $\pi^{-1}(U)$ offen in M ist.

Falls M ein metrischer Raum mit Metrik d ist, dann ist die so definierte Topolgie auf $M/\sim$ genau die von der folgenden Metrik $\overline{d}$ erzeugten Topologie: $\overline{d}([x],[y]) := inf\{d(a,b) : a \sim x, b \sim y\}$.

Beispiel 34 *: Auf $\mathbb{R}$ betrachten wir die Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow x - y = k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist $\mathbb{R}/\sim$ homöomorph zu $\mathbb{S}^1$, ein Homöomorphismus ist gegeben durch $F : \mathbb{R}/\sim \to \mathbb{S}^1, F([x]) = e^{2\pi i x}$.*

Wir werden in dieser Vorlesung den folgenden Typ von Äquivalenzrelationen betrachten. Sei G eine Lie-Gruppe und H eine Untergruppe. Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf G durch $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1 g_2^{-1} \in H$. (Man prüft leicht nach, dass aus den Gruppenaxiomen für H folgt, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.) Wir bezeichnen dann $G/H := G/\sim$ und $\pi : G \to G/H$ die Projektion $\pi(g) = [g]$. Wir betrachten G/H mit der wie folgt definierten Topologie: eine Menge $U \subset G/H$ ist offen genau dann, wenn $\pi^{-1}(U) \subset G$ offen ist.

Beispiel 35 *: $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist homöomorph zu $\mathbb{S}^1$. Der Homöomorphismus ist gegeben durch $F([x]) = e^{2\pi i x}$.*

Jede abgeschlossene Untergruppe einer Lie-Gruppe einer Untermannigfaltigkeit. Weil wir dies nicht allgemein beweisen wollen, nehmen wir es im folgenden Satz als zusätzliche Voraussetzung an.

Satz 9 *: Sei G eine Lie-Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe, die eine Untermannigfaltigkeit ist. Dann ist G/H eine Mannigfaltigkeit.*

Beweis: Sei $n = dim\,(G)\,, k = dim\,(H)$. Wir wählen ein Komplement $\mathfrak{p}$ zu $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$, d.h. eine Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$.

Für die durch $F\,(p,h) = exp\,(p)\,exp\,(h)$ definierte Abbildung $F : \mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h} \to G$ gilt $DF_0 = id$, also ist F ein lokaler Diffeomorphismus um $(0,0)$. Es gibt also eine Umgebung V von $(0,0)$, so dass $F\mid_V$ ein Diffeomorphismus ist. Weil H eine Untermannigfaltigkeit ist, können wir V so klein wählen, dass $H \cap exp\,(V) = exp\,(\mathfrak{h} \cap V)$ ist.

Wegen Stetigkeit können wir eine kleinere Umgebung $U \subset V \subset \mathfrak{g}$ finden, so dass aus $u_1, u_2 \in U$ immer $exp\,(u_1)^{-1}\,exp\,(u_2) \in exp\,(V)$ folgt.

Die Abbildung

$$\pi F\mid_{\mathfrak{p}\cap U} : \mathfrak{p} \cap U \to G/H$$

ist stetig und offen. Um zu zeigen, dass sie ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist, müssen wir Injektivität nachprüfen. Sei also $\pi F\,(u_1) = \pi F\,(u_2) \in G/H$ für $u_1, u_2 \in \mathfrak{p} \cap U$. Dann folgt $F\,(u_1) = F\,(u_2)\,h$ für ein $h \in H$. Also $h = exp\,(u_2)^{-1}\,exp\,(u_1) \in exp\,(V)$. Also $h \in H \cap exp\,(V) = exp\,(\mathfrak{h} \cap V)$, woraus $exp\,(u_1) = exp\,(u_2)\,exp\,(w)$ mit $w \in \mathfrak{h} \cap V$. Weil $F\mid_V$ ein Diffeomorphismus ist, folgt $u_1 = u_2, h = 1$, womit wir Injektivität bewiesen haben.

Zu $[g] \in G/H$ können wir also die Umgebung $U_g = \{[gexp\,(v)] : v \in \mathfrak{p} \cap U\}$ und den Homöomorphismus $\phi_g = (exp\mid_U)^{-1}\,l_{g^{-1}} : U_g \to \mathfrak{p} \cap U \subset \mathfrak{p} = \mathbb{R}^{n-k}$ betrachten. Wenn wir $F_g : U \to G$ durch $F_g\,(v) = gexp\,(v)$ definieren ist also $\phi_g^{-1} = F_g\mid_{\mathfrak{p}}$. $F_h^{-1}F_g$ ist die Verknüpfung differenzierbarer Abbildungen, also ist $\phi_h\phi_g^{-1} = F_h^{-1}F_g\mid_{\mathfrak{p}}$ als Einschränkung einer differenzierbaren Abbildung auf $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ wieder differenzierbar. $\{(U_g, \phi_g)\}$ definiert also einen differenzierbaren Atlas.

QED

Aus der Konstruktion des Atlas auf G/H folgt, dass die Projektion $\pi : G \to G/H$ eine Submersion ist. Tatsächlich ist ihr Differential gerade die Projektion $\mathfrak{g} \to \mathfrak{p}$.

Korollar 9 *: Sei G eine Lie-Gruppe, H eine abgeschlossene Untergruppe. Dann ist $\mathfrak{h}$ eine Unter-Lie-Algebra und für jedes $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ ist $D\,(\pi\exp) : \mathfrak{p} \to T_{[e]}G/H$ ein Isomorphismus.*

Beweis: Weil die Inklusion $H \to G$ ein Homomorphismus ist, ist sein Differential, die Inklusion $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus. Insbesondere ist $\mathfrak{h}$ eine Unter-Lie-Algebra. Der Isomorphismus $\mathfrak{p} \to T_{[e]}G/H$ folgt aus dem Beweis von Satz 9. *QED*

Beispiel 36 *: $T_{[\mathbb{I}]}SL\,(n,\mathbb{R})\,/SO\,(n) \simeq \left\{A \in sl\,(n,\mathbb{R}) : A = A^T\right\}$.*

Beweis: Jede Matrix in $sl(n,\mathbb{R})$ läßt sich eindeutig als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix zerlegen. Also ist $sl(n,\mathbb{R}) = \mathfrak{p} \oplus so(n)$ mit $\mathfrak{p} = \left\{A \in sl(n,\mathbb{R}) : A = A^T\right\}$. *QED*

Definition 47 *: Eine differenzierbare Wirkung einer Lie-Gruppe auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine differenzierbare Abbildung $\mu : G \times M \to M$ mit $\mu(e,x) = x$ und $\mu(g,\mu(h,x)) = \mu(gh,x)$ für alle $x \in M, g,h \in G$.*

Korollar 10 *: Sei μ eine differenzierbare Wirkung einer Lie-Gruppe auf einer Mannigfaltigkeit M, so dass für ein $x_0 \in M$ die durch $F(g) = \mu(g,x_0)$ definierte Abbildung $F : G \to M$ eine surjektive Submersion ist. Sei $H = \{g \in G : \mu(g,x_0) = x_0\}$. Dann ist M diffeomorph zu G/H.*

Beweis: Man prüft leicht nach, dass $f([g]) = \mu(g,x_0)$ eine Bijektion $f : G/H \to M$ definiert.

Differenzierbarkeit von f ist äquivalent zu der Behauptung, dass für jede (im Beweis von Satz 9 definierte) Karte ϕ_g von G/H die Verknüpfung $f\phi_g^{-1}$ differenzierbar ist. Weil μ differenzierbar ist, ist auch die Einschränkung $\mu\mid_{G\times\{x_0\}}: G \to M$ und damit auch $\mu\mid_{G\times\{x_0\}} \circ exp : \mathfrak{g} \to M$ differenzierbar. $f\phi_g^{-1}$ ist aber gerade die Einschränkung dieser Abbildung auf $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$, und damit ebenfalls differenzierbar.

Um zu zeigen, dass die Umkehrabbildung differenzierbar ist, genügt es nachzuprüfen, dass f ein lokaler Diffeomorphismus ist. Nach Annahme ist DF surjektiv. Andererseits ist $DF\mid_{\mathfrak{h}} \equiv 0$. Also muß $Df = DF\mid_{\mathfrak{p}}$ ein Isomorphismus sein. Damit ist f ein lokaler Diffeomorphismus. *QED*

Beispiel 37 *: $\mu(A,x) = Ax$ ist eine differenzierbare Wirkung von $SO(n+1)$ auf $\mathbb{S}^n$. Für $x_0 = (0,\ldots,0,1)$ ist $F(A) = \mu(A,x_0)$ eine surjektive Submersion mit $H = SO(n)$. Also ist $\mathbb{S}^n = SO(n+1)/SO(n)$.*
Genau so kann man eine Wirkung von $O(n+1)$ auf $\mathbb{S}^n$ definieren und erhält $\mathbb{S}^n = O(n+1)/O(n)$.
Analog ist $\mathbb{H}^n = SO(n,1)/SO(n) = O(n,1)/O(n)$.

Übungsaufgaben 15 *: 1. Eine Wirkung einer Gruppe G auf einer Menge X ist eine Abbildung $\mu : G \times X \to X$ mit $\mu(e,x) = x$ und $\mu(g,\mu(h,x)) = \mu(gh,x)$ für alle $x \in X, g,h \in G$. Man schreibt abkürzend gx für $\mu(g,x)$. Eine Wirkung ist transitiv, wenn es für alle $x,y \in X$ ein $g \in G$ mit $gx = y$ gibt.*
a) Zeigen Sie: für jede Untergruppe $H \subset G$ wird durch $g_1[g_2] = [g_1g_2]$ eine transitive Wirkung von G auf G/H definiert.
b) Sei X eine Menge, $x_0 \in X$. Zeigen Sie: eine Wirkung einer Gruppe G auf X ist transitiv genau dann, wenn für alle $y \in X$ ein $g \in G$ mit $gx_0 = y$ existiert.
c) Sei $\mu : G \times X \to X$ eine transitive Wirkung von G auf X, sei $x_0 \in X$ und $H := \{g \in G : gx_0 = x_0\}$. Zeigen Sie: es gibt eine Bijektion zwischen X und G/H.
2. Zeigen Sie: es gibt eine Bijektion zwischen $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$ und dem homogenen Raum $SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass durch $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}$ eine Wirkung von $SL(2,\mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}^2$

definiert wird.
3. Zeigen Sie: es gibt eine Bijektion zwischen der Menge der k-dimensionalen Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$ und dem homogenen Raum $O(n) / (O(k) \times O(n-k))$.
Hinweis: Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ ein k-dimensionaler Untervektorraum, $A \in O(n)$, dann ist auch $AV = \{w : w = Av, v \in V\}$ ein k-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.
4. Zeigen Sie: es gibt eine Bijektion zwischen der Menge aller symmetrischen, positiv definiten, Bilinearformen auf dem $\mathbb{R}^n$ und dem homogenen Raum $GL(n, \mathbb{R}) / O(n)$.
Hinweis: Sei B eine symmetrische, positiv definite, Bilinearform, und $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Sei $A^* B(x, y) := B\left(A^{-1}x, A^{-1}y\right)$. Zeigen Sie, dass $A^* B$ eine symmetrische, positiv definite, Bilinearform ist.

5.2 Homogene Räume (differentialgeometrisch)

Auf einem homogenen Raum G/H hat man eine wohldefinierte Linksmultiplikation $l_g : G/H \to G/H$ für alle $g \in G$. (Dagegen ist die Rechtsmultiplikation r_g nur dann wohldefiniert, wenn H ein Normalteiler, d.h. $ghg^{-1} \in H$ für alle $h \in H, g \in G$ ist.)

Definition 48 *: Sei $\overline{g}$ eine Riemannsche Metrik auf G und $\mathfrak{g}$ eine Riemannsche Metrik auf G/H. Sei $\pi : G/ \to G/H$ die Projektion, $\mathfrak{h} = ker(D\pi)$ und $\mathfrak{p} = \mathfrak{h}^{\perp}$ das orthogonale Komplement bzgl. $\overline{g}$. Wir sagen, dass $\pi : G \to G/H$ eine Riemannsche Submersion ist, wenn $g(D\pi X, D\pi Y) = \overline{g}(X, Y)$ für alle $X, Y \in \mathfrak{p}$ ist.*

Eine linksinvariante Metrik g auf G/H ist eine Riemannsche Metrik mit $g_{gp}(Dl_g(X_p), Dl_g(Y_p)) = g_p(X_p, Y_p)$ für alle $X, Y \in T_pG/H, g \in G$. Wenn die Riemannsche Metrik g linksinvariant ist, dann folgt aus der Koszul-Formel, dass auch der Levi-Civita-Zusammenhang, und damit auch der Krümmungstensor, invariant unter allen Linksmultiplikationen mit Elementen aus G ist.

Sei $h \in H$. $l_h : G/H \to G/H$ bildet $[e]$ auf sich ab. Insbesondere haben wir mit $\mathfrak{p} \simeq T_{[e]}G/H$ eine Abbildung $Dl_h : \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$.

Lemma 29 *: Sei G eine Lie-Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe, die eine Untermannigfaltigkeit ist. Sei g_0 ein Skalarprodukt auf $\mathfrak{g}$, so dass $g_0 \mid_{\mathfrak{p}}$ Dl_h-invariant ist, für alle $h \in H$. Dann ist durch $\overline{g}(X_g, Y_g)) = g_0\left(Dl_g^{-1}X_g, Dl_g^{-1}Y_g\right)$ und $g\left(X_{[g]}, Y_{[g]}\right)) = g_0\left(Dl_g^{-1}X_g, Dl_g^{-1}Y_g\right)$ eine Riemannsche Metrik auf G bzw. G/H definiert, mit der Π eine Riemannsche Submersion wird.*

Korollar 11 *: Sei G eine Lie-Gruppe und H eine kompakte Untergruppe. Dann gibt es auf G/H eine links-invariante Riemannsche Metrik.*

Beweis: Wir bemerken zunächst, dass ein Skalarprodukt g_0 auf $\mathfrak{p} \simeq T_{[e]}G/H$ genau dann durch $g(X_g, Y_g) = g_0\left(Dl_g^{-1}X_g, Dl_g^{-1}Y_g\right)$ eine links-invariante Metrik auf G/H definiert, wenn g_0 Dl_h-invariant für alle $h \in H$ ist.

Wir starten nun mit einem beliebigen Skalarprodukt $< .,. >$ auf $\mathfrak{g}$. Weil H kompakt ist, gibt es auf H ein H-invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß μ. Dann ist
$g_0(X, Y) = \int_H < Dl_hX, Dl_hY > d\mu(h)$ ein Dl_h-invariantes Skalarprodukt auf $\mathfrak{p}$, für alle $h \in H$. Also erhalten wir eine links-invariante Metrik auf G/H. *QED*

Sei also g_0 ein (für alle $h \in H$) Dl_h-invariantes Skalarprodukt auf $\mathfrak{p}$. Dann erhalten wir eine links-invariante Riemannsche Metrik g auf G/H und eine links-invariante Riemannsche Metrik $\overline{g}$ auf G.

Für $x \in G$ zerlegt sich der Tangentialraum $T_xG = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ in den vertikalen Anteil $\mathfrak{h} = ker\,(D\pi_x)$ und den horizontalen Anteil $\mathfrak{p} = \mathfrak{h}^{\perp}$, welcher mittels der gegebenen links-invarianten Riemannschen Metrik $\overline{g}$ definiert ist. Für Vektoren $Z \in TG$ haben wir eine eindeutige Zerlegung $Z = Z_{\mathfrak{h}} \oplus Z_{\mathfrak{p}}$ mit $Z_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}$ und $Z_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{p}$. Aus der Konstruktion folgt, dass $D\pi\mid_{\mathfrak{p}}$ eine Isometrie ist.
Für Vektoren $X \in T\,(G/H)$ bezeichnen wir mit $\overline{X} \in \mathfrak{p}$ den eindeutigen horizontalen Vektor mit $D\pi\left(\overline{X}\right) = X$. Wenn π eine Riemannsche Submersion ist, haben wir dann also $g\,(X,Y) = \overline{g}\left(\overline{X},\overline{Y}\right)$.

Lemma 30 *: Seien X,Y Vektorfelder auf G/H und $\overline{X},\overline{Y}$ ihre horizontalen Hochhebungen. Dann ist $\left[\overline{X},\overline{Y}\right] - \overline{[X,Y]}$ vertikal. Weiterhin ist $\left[\overline{X},T\right]$ vertikal für jedes vertikale Vektorfeld T.*

Beweis: Dies folgt aus $D\pi\left(\left[\overline{X},\overline{Y}\right] - \overline{\left[X,Y\right]}\right) = [X,Y] - [X,Y] = 0$ und
$D\pi\left[\overline{X},T\right] = [X,0] = 0.$ *QED*

Korollar 12 *: Seien $\overline{g}$ eine links-invariante Metrik auf G und g eine links-invariante Metrik auf G/H, so dass $D\pi\mid_{\mathfrak{p}}$ eine Isometrie ist. Dann ist für horizontale Vektorfelder $\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}$ und ein vertikales Vektorfeld T:*

$$\overline{g}\left(\left[\overline{X},\overline{Y}\right],\overline{Z}\right) = g\left(\left[X,Y\right],Z\right) \tag{5}$$

$$\overline{g}\left(\left[\overline{X},T\right],\overline{Y}\right) = 0. \tag{6}$$

Beweis: Für beliebige Vektoren $X,Y,Z \in T\,(G/H)$ und ihre horizontalen Hochhebungen $\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}$ gilt:

$$\overline{g}\left(\left[\overline{X},\overline{Y}\right],\overline{Z}\right) = \overline{g}\left(\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathfrak{p}},\overline{Z}\right) = g\left(D\pi\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathfrak{p}},D\pi\overline{Z}\right) = g\left(\left[X,Y\right],Z\right).$$

Außerdem gilt für ein vertikales Feld T:

$$\overline{g}\left(\left[\overline{X},T\right],\overline{Y}\right) = \overline{g}\left(\left[\overline{X},T\right]_{\mathfrak{p}},\overline{Y}\right) = g\left(D\pi\left[\overline{X},T\right],Y\right) = 0.$$

QED

Lemma 31 *: Seien $\overline{g}$ eine links-invariante Metrik auf G und g eine links-invariante Metrik auf G/H, so dass $D\pi\mid_{\mathfrak{p}}$ eine Isometrie ist. Seien $\overline{\nabla}$ und ∇ die Levi-Civita-Zusammenhänge. Seien $\overline{X},\overline{Y}$ links-invariante horizontale Vektorfelder und sei T ein links-invariantes vertikales Vektorfeld. Dann ist*

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = \overline{\nabla_X Y} + \frac{1}{2}\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathfrak{h}}. \tag{7}$$

und

$$\overline{g}\left(\overline{\nabla}_T\overline{X},\overline{Y}\right) = -\frac{1}{2}\overline{g}\left(\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathfrak{h}},T\right). \tag{8}$$

Beweis:

Seien ∇ bzw. $\overline{\nabla}$ die Levi-Civita-Zusammenhänge zu g bzw. $\overline{g}$. Weil $\overline{g}$ linksinvariant ist, gilt für links-invariante Vektorfelder $\overline{X},\overline{Y}$, dass $\overline{g}\left(\overline{X},\overline{Y}\right)$ konstant ist, insbesonder $\overline{Z}\overline{g}\left(\overline{X},\overline{Y}\right)=0$. Mit der Koszul-Formel folgt aus Gleichung (5), daß

$$\overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y},\overline{Z}\right) = g\left(\nabla_X Y, Z\right)$$

und aus Gleichung (6), daß

$$\overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y},T\right) = \frac{1}{2}g\left(\left[\overline{X},\overline{Y}\right],T\right) - \frac{1}{2}T\overline{g}\left(\overline{X},\overline{Y}\right) = \frac{1}{2}g\left(\left[\overline{X},\overline{Y}\right],T\right),$$

insgesamt also, daß

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = \overline{\nabla_X Y} + \frac{1}{2}\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathfrak{h}}.$$

Für ein vertikales Vektorfeld T ist, unter Benutzung von $\left[T,\overline{X}\right] = \overline{\nabla}_T\overline{X} - \overline{\nabla}_{\overline{X}}T$ und weil $\left[\overline{X},T\right]$ vertikal ist,

$$\overline{g}\left(\overline{\nabla}_T\overline{X},\overline{Y}\right) = \overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}T,\overline{Y}\right) + \overline{g}\left(\left[T,\overline{X}\right],\overline{Y}\right) = \overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}T,\overline{Y}\right).$$

Wegen $\overline{g}\left(T,\overline{Y}\right)=0$ ist $\overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}T,\overline{Y}\right) + \overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y},T\right)=0$, also

$$\overline{g}\left(\overline{\nabla}_T\overline{X},\overline{Y}\right) = -\overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y},T\right) = -\frac{1}{2}\overline{g}\left(\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathfrak{h}},T\right).$$

QED

Satz 10 (**O'Neill-Formel**): *Seien $\overline{g}$ eine links-invariante Metrik auf G und g eine links-invariante Metrik auf G/H, so dass $D\pi\mid_{\mathfrak{p}}$ eine Isometrie ist. Dann gilt $K(X,Y) = K\left(\overline{X},\overline{Y}\right) + \frac{3}{4}\parallel\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathfrak{h}}\parallel^2$ für $X,Y\in T_p(G/H)$.*

Beweis: Seien $X,Y\in T_p(G/H)$ orthonormale Vektoren. Dann ist

$$K(X,Y) = g\left(\nabla_X\nabla_Y Y,X\right) - g\left(\nabla_Y\nabla_X Y,X\right) - g\left(\nabla_{[X,Y]}Y,X\right)$$

$$= Xg\left(\nabla_Y Y,X\right) - g\left(\nabla_Y Y,\nabla_X X\right) - Yg\left(\nabla_X Y,X\right) + g\left(\nabla_X Y,\nabla_Y X\right) - g\left(\nabla_{[X,Y]}Y,X\right)$$

$$= \overline{X}\overline{g}\left(\overline{\nabla_Y Y},\overline{X}\right) - \overline{g}\left(\overline{\nabla_Y Y},\overline{\nabla_X X}\right) - \overline{Y}\overline{g}\left(\overline{\nabla_X Y},\overline{X}\right) + \overline{g}\left(\overline{\nabla_X Y},\overline{\nabla_Y X}\right) - \overline{g}\left(\overline{\nabla_{[X,Y]}Y},\overline{X}\right)$$

$$= \overline{X}\overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Y},\overline{X}\right) - \overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Y},\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{X}\right) - \overline{Y}\overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y},\overline{X}\right) + \frac{1}{2}\overline{g}\left(\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathfrak{h}},\overline{Y}\right)$$

$$+\overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y},\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X}\right) - \frac{1}{2}\overline{g}\left(\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathfrak{h}},\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X}\right) - \frac{1}{2}\overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y},\left[\overline{Y},\overline{X}\right]_{\mathfrak{h}}\right) + \frac{1}{4}\overline{g}\left(\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathfrak{h}},\left[\overline{Y},\overline{X}\right]_{\mathfrak{h}}\right)$$

$$-\overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathfrak{h}}}\overline{Y},\overline{X}\right) - \overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathfrak{p}}}\overline{Y},\overline{X}\right)$$

$$= K\left(\overline{X},\overline{Y}\right) + \frac{1}{2}\overline{g}\left(\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathfrak{h}}, \overline{Y}\right) + \frac{1}{2}\overline{g}\left(\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathfrak{h}}, \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X}\right) + \frac{1}{4}\overline{g}\left(\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathfrak{h}}, \left[\overline{Y},\overline{X}\right]_{\mathfrak{h}}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\overline{g}\left(\left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathfrak{h}}, \left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathfrak{h}}\right)$$
$$= K\left(\overline{X},\overline{Y}\right) + 0 + \frac{1}{2} \parallel \left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathfrak{h}} \parallel^2 - \frac{1}{4} \parallel \left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathfrak{h}} \parallel^2 + \frac{1}{2} \parallel \left[\overline{X},\overline{Y}\right]_{\mathfrak{h}} \parallel^2 .$$

QED

Korollar 13 : *Wenn wir eine bi-invariante Metrik auf G haben, gilt für die induzierte Metrik auf G/H:* $K(X,Y) = \frac{1}{4} \parallel [X,Y]_{\mathfrak{p}} \parallel^2 + \parallel [X,Y]_{\mathfrak{h}} \parallel^2$. *Insbesondere hat G/H nichtnegative Schnittkrümmung.*

Beweis:
$K(X,Y) = K\left(\overline{X},\overline{Y}\right) + \frac{3}{4} \parallel [X,Y]_h \parallel^2 = \frac{1}{4} \parallel [X,Y] \parallel^2 + \frac{3}{4} \parallel [X,Y]_h \parallel^2$. *QED*

Beispiel 38 : *Wir betrachten* $SO(3)/SO(2)$ *mit der durch* $-B$ *induzierten Riemannschen Metrik. Dann ist* $K \equiv 1$.

Beweis: Eine Basis von $so(3)$ ist $f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Man berechnet $[f_1, f_2] = f_3, [f_1, f_3] = -f_2, [f_2, f_3] = f_1$.

Weil $so(3)$ isomorph zu $su(2)$ ist (mit einem Spur-erhaltenden Isomorphismus), ist $B(X,Y) = 4Tr(XY)$. Man berechnet $Tr(f_i f_j) = 0$ für $i \neq j$ und $Tr\left(f_i^2\right) = -8$. Also ist $\left\{\frac{1}{\sqrt{8}} f_i : i = 1,2,3\right\}$ eine ON-Basis. Weil $so(2) \subset so(3)$ von f_1 aufgespannt wird, wird das orthogonale Komplement $\mathfrak{p}$ von f_2 und f_3 aufgespannt. Für die Schnittkrümmung erhalten wir $K(f_2, f_3) = \frac{1}{8} \parallel [f_2, f_3] \parallel^2 = 1$. *QED*

6 Einstein-Mannigfaltigkeiten

6.1 Beispiele

Definition 49 : *Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit M heißt Einstein-Mannigfaltigkeit, wenn es eine Konstante* $c \in \mathbb{R}$ *mit* $Ric(X,Y) = cg(X,Y)$ *für alle* X, Y *gibt. (Man sagt auch, M hat 'konstante Ricci-Krümmung'.)*

Proposition 17 : *Sei M eine n-dimensionale Einstein-Mannigfaltigkeit mit* $Ric = cg$ *für ein* $c \in \mathbb{R}$. *Dann hat M konstante Skalarkrümmung* $Scal = nc$.

Beweis: Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine ON-Basis von T_xM. Dann ist $Scal = \sum_{i=1}^{n} Ric(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{n} cg(e_i, e_i) = nc$. *QED*

Die Feld-Gleichung der relativistischen Gravitationstheorie ist $Ric - \frac{1}{n} Scalg = T$ für den Energie-Impuls-Tensor T. Im Vakuum ist $T = 0$ und man erhält die obige Einstein-Bedingung.

Beispiel 39 *: Wenn die Schnittkrümmung von M konstant K ist, dann ist M eine Einstein-Mannigfaltigkeit mit $c = (n-1) K$.*

Insbesondere sind $\mathbb{S}^n, \mathbb{E}^n, \mathbb{H}^n$ Einstein-Mannigfaltigkeiten.

Beispiel 40 *: Seien M_1, M_2 Einstein-Mannigfaltigkeiten mit der selben Konstante c. Dann ist das Produkt $M_1 \times M_2$ eine Einstein-Mannigfaltigkeit.*

Beweis: Sei K_1 die Schnittkrümmung von M_1, K_2 die Schnitttkrümmung von M_2. Dann ist $K(X,Y) = K_i(X,Y)$ falls $X, Y \in T_pM_i, i = 1,2$ und $K(X,Y) = 0$ falls $X \in T_pM_1, Y \in T_pM_2$. Daraus folgt, für $X \in T_pM_1$ $Ric(X,X) = \sum_{j=1}^{n_1+n_2} K(X, e_j) = \sum_{j=1}^{n_1} K_1(X, e_j) = Ric_1(X,X)$, analog für $X \in T_pM_2$. *QED*

Damit ist also $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ eine Einstein-Mannigfaltigkeit, obwohl die Schnittkrümmung *nicht* konstant ist. Zum Beispiel hat die geodätische Mannigfaltigkeit $\mathbb{S}^2 \times *$ Schnittkrümmung 1, während die geodätische Untermannigfaltigkeit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ Schnittkrümmung 0 hat.

Definition 50 *: Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Gruppe $\Gamma \subset Isom(M)$ heißt eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe von Isometrien wenn gilt: für alle $x \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset M$ mit $gU \cap U = \emptyset$ für alle $g \in \Gamma - \{e\}$.*

Lemma 32 *: Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\Gamma \subset Isom(M)$ eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe von Isometrien. Dann ist M/Γ eine Mannigfaltigkeit und $\pi : M \to M/\Gamma$ ein lokaler Diffeomorphismus.*

Beweis: $\pi \mid_U$ ist eine Bijektion auf sein Bild, nach Voraussetzung. Wir können also, für Karten ϕ_x um U_x, $\left\{ \left(\pi(U_x), \phi_x \pi \mid_{U_x}^{-1} \right) \right\}$ als Atlas von M/Γ verwenden. *QED*

Wir benutzen diese lokalen Diffeomorphismen, um auf M/Γ eine Riemannsche Metrik zu definieren. Weil die Einschränkung $\pi \mid_U$ dann eine Isometrie ist, hat die Riemannsche Metrik von M/Γ in $\pi(x)$ dieselbe Krümmung wie M in x.

Korollar 14 *: a) Wenn Γ eine eigentlich diskontinuierliche Untergruppe von $Isom(\mathbb{S}^n)$ ist, dann hat $\mathbb{S}^n/\Gamma$ eine Metrik mit Schnittkrümmung konstant 1.*
b) Wenn Γ eine eigentlich diskontinuierliche Untergruppe von $Isom(\mathbb{R}^n)$ ist, dann hat $\mathbb{R}^n/\Gamma$ eine Metrik mit Schnittkrümmung konstant 0.
c) Wenn Γ eine eigentlich diskontinuierliche Untergruppe von $Isom(\mathbb{H}^n)$ ist, dann hat $\mathbb{H}^n/\Gamma$ eine Metrik mit Schnittkrümmung konstant -1.

Insbesondere erhält man weitere Beispiele von Einsteinmannigfaltigkeiten. Nach einem Satz von Cartan liefern die Beispiele aus Korollar 14 (bis auf Reskalierung) alle Mannigfaltigkeiten mit konstanter Schnittkrümmung. (Reskalierung bedeutet: für eine Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $\equiv \pm c$ kann man die Metrik mit c multiplizieren und erhält eine Metrik mit Schnittkrümmung ± 1.)

Definition 51 *: Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Gruppe $\Gamma \subset Isom(M)$ wirkt ohne Fixpunkte auf M, wenn $gx \neq x$ für alle $x \in M, g \in \Gamma$ gilt.*

Wirkungen endlicher Gruppen.

Lemma 33 *: Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\Gamma \subset Isom(M)$ eine endliche Gruppe, die ohne Fixpunkte auf M wirkt. Dann wirkt Γ eigentlich diskontinuierlich.*

Beweis: Sei $x \in M$. Nach Voraussetzung ist $d(x, gx) > 0$ für alle $g \in \Gamma$. Weil Γ endlich ist, folgt daraus $\epsilon := inf\{d(x, gx) : g \in \Gamma\} > 0$. Wähle $U := B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)$. *QED*

Beispiel 41 *: Bekanntlich ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ isomorph zu $\{\xi \in \mathbb{C} : \xi^p = 1\}$. Diese Gruppe wirkt eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{S}^3$ durch $\xi(z, w) = (\xi z, \xi w)$. Der Quotient heißt* **Linsenraum** *$L(p, 1)$ und trägt also eine Metrik mit Schnittkrümmung $\equiv 1$. $L(2, 1) = \mathbb{R}P^3$ heißt reell-projektiver Raum.*

Beispiel 42 *Sei $A_5 \subset SO(3)$ die Isometriegruppe des Ikosaeders (isomorph zur Gruppe der geraden Permutationen von 5 Elementen). Nach Proposition 3 haben wir eine surjektive 2:1-Abbildung $Ad : SU(2) \to SO(3)$. $\Gamma := Ad^{-1}(A_5)$ ist eine Untergruppe von $SU(2)$ mit 120 Elementen. Weil $\mathbb{S}^3$ eine Lie-Gruppe ist, ist $SU(2) = \mathbb{S}^3 \subset Isom(\mathbb{S}^3)$. Also wirkt $\Gamma \subset SU(2)$ eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{S}^3$. Der Quotient heißt* **Poincare-Homologiesphäre** *und trägt also eine Metrik mit Schnittkrümmung $\equiv 1$.*

Wirkungen torsionsfreier Gruppen.

Definition 52 *: Sei G eine Lie-Gruppe. Eine Untergruppe $\Gamma \subset G$ ist diskret, wenn sie eine 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist.*

Mit anderen Worten: Γ ist diskret, wenn es zu jedem $\gamma \in \Gamma$ eine offene Umgebung $U \subset G$ mit $U \cap \Gamma = \{\gamma\}$ gibt.

Beispiel 43 *:1. Endliche Untergruppen sind diskret.*
2. Wenn G kompakt ist, sind alle diskreten Untergruppen endlich.
3. $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ ist diskret.
4. Sei $\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Dann ist $\mathbb{Z}[\omega] = \{z = a + b\omega \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ diskret.
5. $SL(2, \mathbb{Z}) \subset SL(2, \mathbb{R})$ ist diskret.
6. $SL(2, \mathbb{Z}[\omega]) \subset SL(2, \mathbb{C})$ ist diskret.

Definition 53 *: Eine Gruppe Γ heisst torsionsfrei, wenn $\gamma^n \neq e$ für alle $\gamma \neq e, n \geq 1$ gilt.*

Proposition 18 *: Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Jede diskrete, torsionsfreie Gruppe $\Gamma \subset Isom(M)$ wirkt ohne Fixpunkte auf M.*

Beweis: Sei $x \in M$ und $G_x = \{g \in G : gx = x\}$. G_x bildet T_xM auf sich ab und erhält das Skalarprodukt g_x. Also ist $G_x \simeq O(n)$, insbesondere ist G_x kompakt. Die diskrete Gruppe $\Gamma \cap G_x$ muss also endlich sein. Weil Γ torsionsfrei ist, folgt daraus $\Gamma \cap G_x = \{e\}$, Γ wirkt also ohne Fixpunkte. *QED*

Lemma 34 *: Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Jede diskrete, torsionsfreie Gruppe $\Gamma \subset Isom(M)$ wirkt eigentlich diskontinuierlich auf M.*

Beweis: Sei $x \in M$. Weil Γ ohne Fixpunkte wirkt, gilt $d(x, gx) > 0$ für alle $g \in \Gamma - \{e\}$.

Wenn es ein $\epsilon > 0$ mit $d(x, gx) > \epsilon$ für alle $g \in \Gamma$ gibt, können wir $U = B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)$ wählen und erhalten $U \cap gU = \emptyset$ für alle $g \in \Gamma - \{e\}$, also dass die Wirkung eigentlich diskontinuierlich ist.

Wir nehmen nun an, dass es ein solches ϵ nicht gibt. Insbesondere gibt es also $g_i \in \Gamma - \{e\}$ mit $d(x, g_ix) < \frac{1}{i}$. Nun ist aber $\{g \in Isom(M) : d(x, gx) \leq \epsilon\}$ homöomorph zu $G_x \times \overline{B_\epsilon}(x)$, insbesondere kompakt. Wir haben also eine konvergente Teilfolge $g_i \to g_\infty \in \Gamma$. Wegen $d(x, g_ix) < \frac{1}{i}$ ist $d(x, g_\infty x) = 0$. Damit hat g_∞ einen Fixpunkt. Dies widerspricht Proposition 18. *QED*

Beispiel 44 *: $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n \subset Isom(\mathbb{R}^n)$ ist eine diskrete, torsionsfreie Untergruppe. Also hat der* **Torus** *$\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ eine Metrik mit Schnittkrümmung $\equiv 0$.*

Nach Thurston's Geometrisierungs-Vermutung lässt sich jede 'hinreichend komplizierte' orientierbare 3-Mannigfaltigkeit als Quotient $\mathbb{H}^3/\Gamma$ für eine diskrete, torsionsfreie Gruppe $\Gamma \subset Isom^+(\mathbb{H}^3) = PSL(2, \mathbb{C})$ darstellen. Die dabei auftretenden Γ sind zwangsläufig sehr komplex, deshalb ist es nicht einfach, explizite Beispiele anzugeben. Die vielleicht einfachste hyperbolische 3-Mannigfaltigkeit ist das Komplement des Achterknotens.

Beispiel 45 *:* **Achterknoten-Komplement.** *Sei Γ die Gruppe mit zwei Erzeugern a, b und der einzigen Relation $ab^{-1}a^{-1}ba = bab^{-1}a^{-1}b$. Γ ist torsionsfrei. Dann ist durch $\rho(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\rho(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega & 1 \end{pmatrix}$ ein injektiver Homomorphismus $\rho : \Gamma \to PSL(2, \mathbb{C}) = Isom^+(\mathbb{H}^3)$ definiert. Das Bild ist diskret, weil es in $PSL(2, \mathbb{Z}[\omega])$ liegt. Der Quotient $\mathbb{H}^3/\Gamma$ trägt also eine Metrik mit Schnittkrümmung $\equiv -1$. Man kann zeigen, dass er homöomorph zum Komplement des Achterknotens in $\mathbb{S}^3$ ist. (Dafür genügt es, mit dem Wirtinger-Kalkül auszurechnen, dass die Fundamentalgruppe isomorph zu Γ ist.)*

6.2 Symmetrische Räume

Homogene Räume müssen im allgemeinen keine Einstein-Mannigfaltigkeiten sein. In diesem Abschnitt betrachten wir eine sehr allgemeine Klasse von homogenen Räumen, die Einstein-Metriken tragen.

Definition 54 *: Ein symmetrischer Raum ist ein zusammenhängender homogener Raum $M = G/K$ (mit einer links-invarianten Riemannschen Metrik), so dass es zu jedem $p \in M$ eine Isometrie $J_p \in G$ mit $J_p(p) = p$ und $DJ_p = -Id$ gibt.*

Bemerkung: man kann zeigen, dass die Homogenität (und die Tatsache, dass die Isometrie J zu G gehört) aus den anderen Bedingungen folgt, also eigentlich überflüssig ist. Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass die Isometriegruppe eine Lie-Gruppe ist. Weil wir diesen ziemlich technischen Satz hier nicht beweisen wollen, betrachten wir von vornherein nur homogene symmetrische Räume.

Proposition 19 *: Wenn M ein symmetrischer Raum, $p \in M$ und J_p die Symmetrie zu p ist, dann gilt $J_p(\gamma(t)) = \gamma(-t)$ für jede Geodäte $\gamma : \mathbb{R} \to M$ mit $\gamma(0) = p$.*

Beweis: Dies folgt aus $DJ_p = -Id$ und Eindeutigkeit der Geodäten, sowie der Tatsache, dass nach Lemma 27 $J_p \circ \gamma$ eine Geodäte sein muss. *QED*

Bemerkung: Aus Proposition 19 folgt insbesondere, dass J_p eindeutig bestimmt ist, wenn es existiert. Man kann also auch J_p durch Proposition 19 definieren und sagen, dass M genau dann ein symmetrischer Raum ist, wenn alle J_p wohldefinierte Isometrien sind. (Wohldefiniertheit heißt hier: wenn es zwei Geodäten γ_1, γ_2 mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ gibt, dann muss auch $\gamma_1(-t) = \gamma_2(-t)$ sein.)

Beispiel 46 *: 1. $\mathbb{S}^n = O(n+1)/O(n)$ ist ein symmetrischer Raum.*
2. $\mathbb{R}^n = Isom(\mathbb{R}^n)/O(n)$ ist ein symmetrischer Raum.
3. $\mathbb{H}^n = O(n,1)/O(n)$ ist ein symmetrischer Raum.

Beweis: In allen drei Fällen ist die durch Proposition 19 definierte Abbildung J_p wohldefiniert und eine Isometrie. *QED*

Sei $M = G/K$ ein symmetrischer Raum und $J = J_{[e]} \in G$ die Symmetrie in $[e]$. Dann definieren wir eine Abbildung $\sigma : G \to G$ durch

$$\sigma(g) = JgJ.$$

Aus Lemma 28 folgt, dass $J^2 = id$ ist. Wegen $J^2 = id$ ist $\sigma^2 = id$. Für die lineare Abbildung $D\sigma_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ gilt damit ebenfalls $(D\sigma_e)^2 = \mathbb{I}$. Insbesondere sind die Eigenwerte von $D\sigma_e$ 1 und -1. Wir definieren

$$\mathfrak{k} := \{X \in \mathfrak{g} : D\sigma_e(X) = X\}$$

$$\mathfrak{p} := \{X \in \mathfrak{g} : D\sigma_e(X) = -X\}.$$

Lemma 35 *: Es gilt:*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p},$$

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, [\mathfrak{k}, p] \subset \mathfrak{p}, [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}.$$

Beweis: Jedes Element $X \in \mathfrak{g}$ lässt sich als $X = \frac{1}{2}(X + D_e\sigma X) + \frac{1}{2}(X - D_e\sigma X)$ mit $\frac{1}{2}(X + D_e\sigma X) \in \mathfrak{k}$ und $\frac{1}{2}(X - D_e\sigma X) \in \mathfrak{p}$ zerlegen. Wegen $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{p} = \{0\}$ folgt daraus die erste Behauptung.
Die zweite Behauptung folgt aus $D_e\sigma[k_1, k_2] = [D_e\sigma k_1, D_e\sigma k_2] = [k_1, k_2], D_e\sigma[k_1, p_2] = [D_e\sigma k_1, D_e\sigma p_2] = [k_1, -p_2] = -[k_1, p_2]$ und $D_e\sigma[p_1, p_2] = [D_e\sigma p_1, D_e\sigma p_2] = [-p_1, -p_2] = [p_1, p_2]$ *QED*

Beispiel 47 *: Sei $M = GL(n,\mathbb{R})/O(n) = SL(n,\mathbb{R})/O(n)$. Dann ist $D\sigma_e(A) = -A^T$.*

Lemma 36 *: Sei $M = G/K$ ein symmetrischer Raum. Dann ist $\mathfrak{k}$ die Lie-Algebra zu K und $\mathfrak{p} \simeq T_{[e]}M$.*

Beweis: Das ist ein Spezialfall von Korollar 9. *QED*

Für jedes $g \in G$ haben wir die Linksmultiplikation $l_g : M \to M$. Insbesondere ist $l_k([e]) = [e]$ für alle $k \in K$.

Definition 55 *: Sei $M = G/K$ ein symmetrischer Raum (mit einer links-invarianten Riemannschen Metrik). Seine Isotropie-Darstellung*

$$\rho : K \to Aut(\mathfrak{p})$$

ist gegeben durch

$$\rho(k) := D_{[e]}l_k.$$

M heißt isotropie-irreduzibel wenn ρ irreduzibel ist.

Beispiel 48 *: $SO(n+1)/SO(n)$ und $SO(n,1)/SO(n)$ sind isotropie-irreduzibel.*

Beweis: In beiden Fällen ist ρ die Standard-Darstellung von $SO(n)$ auf $\mathbb{R}^n$, welche irreduzibel ist. *QED*

Satz 11 *: Isotropie-irreduzible symmetrische Räume sind Einstein-Mannigfaltigkeiten.*

Beweis: Weil die Metrik invariant unter l_k ist, ist auch die Ricci-Krümmung invariant unter l_k, für alle $k \in K$. Insbesondere ist jeder Eigenraum von $Ric_{[e]}$ invariant unter ρ (wenn wir die Bilinearform $Ric_{[e]}$ mittels des Skalarprodukts $g_{[e]}$ als lineare Abbildung auffassen). Weil $Ric_{[e]}$ symmetrisch ist, ist es diagonalisierbar. Wegen Irreduzibilität von ρ folgt daraus aber, dass es nur einen Eigenraum gibt. Also $Ric_{[e]} = \lambda g_{[e]}$. Weil g und Ric invariant unter l_g sind, folgt dann $Ric_{[g]} = \lambda g_{[g]}$ für alle $g \in G$. *QED*

6.3 Typen symmetrischer Räume (Überblick)

Definition 56 *: Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra, $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ eine Unter-Lie-Algebra. Die Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ heißt eine Cartan-Zerlegung von $\mathfrak{g}$, wenn gilt: $[\mathfrak{k},\mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, [\mathfrak{k},p] \subset \mathfrak{p}, [\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$, und wenn B_θ positiv definit ist.*

Hierbei ist B_θ definiert durch $B_\theta(X,Y) := B(X,\theta Y)$ für die Killingform B und die durch $\theta\mid_{\mathfrak{k}} = id, \theta\mid_{\mathfrak{p}} = -id$ definierte Abbildung $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

Beispiel 49 *: $sl(n,\mathbb{C}) = su(n) \oplus \mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p} = \left\{A \in sl(n,\mathbb{C}) : A = \overline{A}^T\right\}$ ist eine Cartan-Zerlegung.*

Für jeden symmetrischen Raum G/K haben wir die Involution $s = D\sigma_e$ und die Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ aus Abschnitt 6.2. Wir benutzen dies für die folgende Definition.

Definition 57 *: Ein symmetrischer Raum ist von kompaktem Typ, wenn $\mathfrak{g}$ negativ definite Killing-Form hat.*
Ein symmetrischer Raum ist von euklidischem Typ, wenn $\mathfrak{p}$ abelsch ist, d.h. $[X,Y]=0$ für alle $X,Y\in\mathfrak{p}$.
Ein symmetrischer Raum ist von nichtkompaktem Typ, wenn die Killingform von $\mathfrak{g}$ nicht entartet, aber nicht negativ definit, ist, und $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ eine Cartan-Zerlegung ist.

Bemerkung: man kann zeigen, dass sich jeder symmetrische Raum als Produkt symmetrischer Räume zerlegen läßt, die von einem dieser drei Typen sind.

Für kompakte symmetrische Räume definiert die Killingform eine linksinvariante Riemannsche Metrik. Für euklidische symmetrische Räume haben wir die Standardmetrik. Das folgende Lemma definiert eine linksinvariante Riemannsche Metrik auch auf symmetrischen Räumen von nichtkompaktem Typ.

Lemma 37 *: Sei K eine maximale kompakte Untergruppe einer Lie-Gruppe G und $M=G/K$ ein symmetrischer Raum von nichtkompaktem Typ. Sei B die Killingform von $\mathfrak{g}$. Dann ist $B\mid_{\mathfrak{k}}$ negativ definit und $B\mid_{\mathfrak{p}}$ positiv definit. Insbesondere definiert B eine G-invariante Riemannsche Metrik auf M.*

Insbesondere kann man auf der Lie-Algebra einer halbeinfachen Lie-Gruppe ein Ad-invariantes Skalarprodukt $<.,.>$ definieren durch $<k,k>=-B(k,k), <k,p>=0, <p,p>=B(p,p)$ für $k\in\mathfrak{k}, p\in\mathfrak{p}$.

Beispiel 50 *: $G/K=SL(n,\mathbb{R})/SO(n)$. Die Killingform ist $B(X,Y)=2nTr(XY)$. Wenn X Eigenwerte λ_i hat, ist also $B(X,X)=\sum\lambda_i^2$. $X\in\mathfrak{k}$ ist schiefsymmetrisch, hat also rein-imaginäre Eigenwerte, woraus $B(X,X)<0$ folgt. $X\in\mathfrak{p}$ ist symmetrisch, hat also reelle Eigenwerte, woraus $B(X,X)>0$ folgt.*

Lemma 38 *: Symmetrische Räume von kompaktem Typ haben Schnittkrümmung ≥ 0, symmetrische Räume von euklidischem Typ haben Schnittkrümmung 0, symmetrische Räume von nichtkompaktem Typ haben Schnittkrümmung ≤ 0.*

Beispiel 51 *: $M=SL(n,\mathbb{R})/SO(n)$ ist ein symmetrischer Raum von nichtkompaktem Typ. Es ist isometrisch zu $Pos(n,\mathbb{R})\subset SL(n,\mathbb{R})$, dem Unterraum der positiv definiten symmetrischen Matrizen. Man kann zeigen, dass die Schnittkrümmung der Ebene durch X und Y*

$$K(X,Y)=-\parallel[X,Y]\parallel^2\leq 0$$

ist. Insbesondere ist ein 2-dimensionaler Unterraum flach (K=0) genau dann, wenn sein Tangentialraum eine abelsche Lie-Algebra ist.

M enthält Flachs vom Rang $n-1$, d.h. $n-1$-dimensionale Unterräume der Schnittkrümmung 0, z.B. den Unterraum aller Diagonalmatrizen. Der Fall $n=1, M=\mathbb{H}^2$ ist also in diesem Beispiel der einzige Fall mit echt negativer Schnittkrümmung.

Lemma 39 *: Der symmetrische Raum G_1/K mit $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ ist von kompaktem Typ genau dann, wenn der symmetrische Raum G_2/K mit $\mathfrak{g}_2=\mathfrak{k}\oplus i\mathfrak{p}$ von nichtkompaktem Typ ist.*

Beweis: Wenn B auf $\mathfrak{g}_1$ negativ definit ist, dann ist $B\mid_{\mathfrak{k}}$ negativ definit und $B\mid_{i\mathfrak{p}}$ positiv definit. Daraus kann man herleiten, dass $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus ip$ eine Cartan-Zerlegung ist. QED

Unter dieser Dualität geht zum Beispiel $\mathbb{S}^n$ in $\mathbb{H}^n$ über. Dies, und die Identitäten $sin\,(t)=\sinh(it)\,,\cos(t)=\cosh(it)$, sind der tiefere Grund für viele analoge Formeln in sphärischer und hyperbolischer Geometrie.

6.4 Geometrie von Räumen nichtpositiver Krümmung (Überblick)

Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) haben wir eine Metrik definiert als $d\,(x,y)=inf\left\{\int_0^1 \parallel \gamma'(t)\parallel dt\right\}$, wobei das Infimum über alle Kurven mit $\gamma(0)=x,\gamma(1)=y$ genommen wird.
Man kann dies insbesondere auf die Mannigfaltigkeit T_pM mit dem (konstanten) Skalarprodukt g_p anwenden.

Definition 58 *: Wir sagen, dass eine Riemannsche Mannigfaltigkeit nichtpositive Krümmung hat, wenn für alle Tangentialvektoren $v,w\in T_pM$ und alle $\lambda\in\mathbb{R}$ gilt:*

$$d\,(expv,expw)\geq d\,(v,w)$$

und

$$d\,(expv,exp\,(\lambda v))=d\,(v,\lambda v)\,.$$

Wir sagen, dass M lokal nichtpositive Krümmung hat, wenn es zu jedem $p\in M$ ein $\epsilon>0$ gibt, so dass die obigen Bedingungen für alle v,w mit $\parallel v\parallel,\parallel w\parallel<\epsilon$ gelten.

Bemerkung: Nach einem Satz von Rauch gilt, dass Riemannsche Mannigfaltigkeiten M mit Schnittkrümmung $K\leq 0$ im Sinne dieser Definition lokal nichtpositive Krümmung haben. Wenn M einfach zusammenhängend ist und $K\leq 0$, hat es nichtpositive Krümmung. Aus Überlagerungstheorie folgt also, dass man jede Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K\leq 0$ als Quotienten $\widetilde{M}/\Gamma$ für eine im Sinne obiger Definition nichtpositiv gekrümmte Mannigfaltigkeit $\widetilde{M}$ und eine diskrete Gruppe $\Gamma\subset Isom\left(\widetilde{M}\right)$ darstellen kann.

Lemma 40 *: Wenn M lokal nichtpositive Krümmung hat, dann gibt es eine Mannigfaltigkeit $\widetilde{M}$ nichtpositiver Krümmung und eine diskrete Gruppe $\Gamma\subset Isom\left(\widetilde{M}\right)$ mit $M=\widetilde{M}/\Gamma$.*

Definition 59 *: Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit heisst CAT(0)-Raum, wenn für jede Geodäte $\gamma:\mathbb{R}\to M$ mit $\gamma(-t)=x_1,\gamma(0)=z,\gamma(t)=x_2$ für ein $t\in\mathbb{R}$ und für jeden Punkt $x\in M$ gilt:*

$$d\,(x_1,x_2)^2+4d\,(x,z)^2\leq 2d\,(x,x_1)^2+2d\,(x,x_2)^2\,.$$

Im euklidischen $\mathbb{R}^2$ gilt Gleichheit in dieser Ungleichung. Man kann also sagen, dass eine Mannigfaltigkeit ein CAT(0)-Raum ist, wenn alle geodätischen Dreiecke (mit gegebenen Seitenlängen) dünner sind als die entsprechenden Dreiecke im $\mathbb{R}^2$ (d.h. kleineren Inkreisradius haben).

Lemma 41 : *Wenn eine Riemannsche Mannigfaltigkeit nichtpositive Krümmung hat, dann ist sie ein CAT(0)-Raum.*

Beweis: In T_zM gilt Gleichheit in der zu beweisenden Ungleichung. exp (mit $exp(0) = z$) erhält $d(x_1, x_2), d(x, 0)$ und vergrößert $d(x, x_1), d(x, x_2)$. *QED*

Korollar 15 : *Wenn eine Riemannsche Mannigfaltigkeit nichtpositive Krümmung hat, dann gibt es durch je zwei Punkte eine eindeutige Geodäte.*

Beweis: Seien γ_1, γ_2 Geodäten mit $x_1 = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $x_2 = \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Wende die CAT(0)-Eigenschaft mit $z = \gamma_1\left(\frac{1}{2}\right)$ und $x = \gamma_2\left(\frac{1}{2}\right)$ an. Man erhält $d(x, z) = 0$, also $x = z$. Dies kann man iterieren und erhält $\gamma_1\left(\frac{1}{2^k}\right) = \gamma_2\left(\frac{1}{2^k}\right)$ für alle k. Damit muß aber auch $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$ sein, woraus $\gamma_1 = \gamma_2$ folgt. *QED*

Definition 60 : *Zwei Geodäten heissen parallel, wenn sie beschränkten Abstand haben. Der ideale Rand $\partial_\infty M$ ist die Menge der Äquivalenzklassen von Geodäten.*

Lemma 42 : *Sei $\widetilde{M}$ eine Mannigfaltigkeit nichtpositiver Krümmung und $\overline{M} = \widetilde{M} \cup \partial_\infty \widetilde{M}$ mit der Kegel-Topologie. Dann ist $\overline{M} \simeq \mathbb{B}^n, \partial_\infty \widetilde{M} \simeq \mathbb{S}^{n-1}, \widetilde{M} \simeq \mathbb{R}^n$.*

Lemma 43 : *Sei $\widetilde{M}$ eine Mannigfaltigkeit nichtpositiver Krümmung. Jede Isometrie $f: \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ induziert eine stetige Abbildung $\overline{f}: \overline{M} \to \overline{M}$.*

Beispiel 52 : *Jede Isometrie des $\mathbb{H}^n$ gehört zu einem von drei Typen: elliptisch (Fixpunkt in $\mathbb{H}^n$), parabolisch (ein Fixpunkt in $\partial_\infty \mathbb{H}^n$) oder hyperbolisch (zwei Fixpunkte in $\partial_\infty \mathbb{H}^n$).*

Insbesondere erhält man zu jeder Mannigfaltigkeit lokal nichtpositiver Krümmung $M = \widetilde{M}/\Gamma$ eine Wirkung von Γ auf $\partial_\infty \widetilde{M}$, die i.a. nicht eigentlich diskontinuierlich, sondern sehr chaotisch ist.