Poincaré-Vermutung

3-dimensionale Mannigfaltigkeit:=
überdeckbar durch 3-dimensionale Karten
(Teilmengen homöomorph zu Teilmengen des R^3)

Ziel: Klassifikation aller 3-Mannigfaltigkeiten

Einfachstes Beispiel: die 3-Sphäre S^3
(Rand einer 4-dimensionalen Kugel)

Vermutung 1 *(Poincaré-Vermutung):*
Jede einfach-zusammenhängende kompakte 3-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zu S^3.

1904 von Poincaré als Frage formuliert.

Bekannte Beispiele zeitweise als korrekt geltender Beweise: Dehn (1908), Whitehead (1933), Koseki (1959), Rourke-Rego (1986), Anderson (1996)

Insbesondere nach erfolglosen Ansätzen von Papakyriaopoulos, Bing, Stallings u.a.
in den 50er/60er Jahren ging man allgemein eher davon aus, daß die Vermutung vermutlich falsch sei.

Konstruktion von 3-Mannigfaltigkeiten

Ein Knoten in einer 3-Mannigfaltigkeit M^3 ist das Bild einer Einbettung $K : S^1 \to M^3$.

Das Komplement einer Tubenumgebung des Knotens ist eine 3-Mannigfaltigkeit mit Rand T^2.

Es gibt unendlich viele Möglichkeiten, einen Volltorus an diesen Rand anzukleben.
("Dehn-Chirurgie an K")

Satz 1 *: (Wallace, Lickorish 1960):*
Jede geschlossene, orientierbare 3-Mannigfaltigkeit läßt sich durch endlich viele Dehn-Chirurgien aus der S^3 erhalten.

Allgemeine 3-Mannigfaltigkeiten

Satz 2 *(Kneser 1929):*
Jede kompakte 3-Mannigfaltigkeit ist zusammenhängende Summe endlich vieler Prim-Mannigfaltigkeiten.

Satz 3 *(Jaco-Shalen-Johansson 1976):*
Jede Prim-Mannigfaltigkeit hat eine eindeutige Zerlegung durch Aufschneiden entlang inkompressibler Tori.

Vermutung 2 .
(Thurston's Geometrisierungsvermutung 1978):
Die Stücke der Jaco-Shalen-Johansson-Zerlegung tragen lokal-homogene Riemannsche Metriken.

Diese Vermutung reduziert sich auf zwei schwierige Spezialfälle.

Vermutung 3 *(Elliptisierungsvermutung):*
Jede geschlossene 3-Mannigfaltigkeit mit endlicher Fundamentalgruppe trägt eine **sphärische Metrik**, *d.h. eine Riemannsche Metrik mit* $K \equiv 1$.

Vermutung 4 *(Hyperbolisierungsvermutung):*
Jede geschlossene Prim-Mannigfaltigkeit, deren Fundamentalgruppe unendlich ist und nicht Z^2 *als Untergruppe enthält, trägt eine* **hyperbolische Metrik**, *d.h. eine Riemannsche Metrik mit* $K \equiv -1$.

Die Geometrisierung der übrigen Stücke der Jaco-Shalen-Johansson-Zerlegung folgt aus bekannten geometrischen und topologischen Sätzen.

Die Poincaré-Vermutung folgt aus der Elliptisierungsvermutung.

Evidenz für Hyperbolisierungsvermutung

Satz 4 *(Thurston 1978):*
Sei $K \subset S^3$ ein unzerlegbarer Knoten, der nicht auf einem Torus liegt.
Dann ergeben fast alle (alle bis auf maximal 10) Dehn-Chirurgien an K Mannigfaltigkeiten, die eine hyperbolische Metrik tragen.

Satz 5 *(Thurston 1981, McMullen, Otal 1994):*
Die Hyperbolisierungsvermutung
gilt für Haken-Mannigfaltigkeiten,
d.h. Prim-Mannigfaltigkeiten, die eine inkompressible Fläche enthalten.

Berechnung hyperbolischer Metriken

M^3 sei gegeben durch Dehn-Chirurgie an einer endlichen Menge von Knoten in S^3

Computer-Programm *SnapPea* (Weeks, 1989) konstruiert Zerlegung von M^3 in ideale Tetraeder

Hyperbolische Metrik auf $M^3 \Longleftrightarrow$
Realisierung der Tetraeder im hyperbolischen Raum H^3, so daß Winkel um eine Kante sich jeweils zu 2π addieren

Ideale Tetraeder in H^3 beschreibbar durch *einen* komplexen Parameter, das Doppelverhältnis der vier Ecken

$t =$ Anzahl der Tetraeder $\Rightarrow$ t komplexe Parameter, die t Polynom-Gleichungen erfüllen

$\Rightarrow$ explizite Beschreibung der hyperbolischen Struktur, Berechenbarkeit geometrischer Größen

Ricci-Fluß

Sei $\left(M^3, g\right)$ eine Riemannsche 3-Mannigfaltigkeit. (g ist Riemannsche Metrik, d.h. ein punktweises Skalarprodukt).

Ziel:
Differentialgleichung auf dem Raum aller Metriken, deren Fluß zu Gleichverteilung der Krümmung führt.
" $\frac{dg}{dt} = -K\left(g\left(t\right)\right)$ " ??

Die Krümmung K ist definiert für Flächen (in 3-Mannigfaltigkeiten) und gibt also für jede Fläche in M eine Zahl. Um eine Fluß-Gleichung für die Metrik zu definieren, braucht man als rechte Seite aber eine Krümmungsgröße, die ein punktweises Skalarprodukt ist.

Definition 1 *:*
Die **Ricci-Krümmung** *von* (M, g) *ist eine quadratische Form, punktweise definiert als*

$$Ric\,(X, X) := K\,(X, e_1) + K\,(X, e_2)\,.$$

Hier ist $\{X, e_1, e_2\}$ eine Orthonormal-Basis des Tangentialraumes,
$K\,(X, e_i)$ die Krümmung der von X und e_i aufgespannten Ebene.

Definition 2 *(Hamilton 1982):*
Der Ricci-Fluß ist gegeben durch

$$\frac{d}{dt} g\,(t) = -2 Ric\,(g\,(t))$$

mit der Anfangsbedingung $g\,(0) = g$.

Ricci-Fluß - Singularitäten

Beispiel 1 *: $g(0)$ habe konstante Krümmung K*
$\Rightarrow g(t) = (1 - 4Kt)\, g(0)$.
Für $K > 0$ bildet sich bei $t = \frac{1}{4K}$ eine Singularität.

Regionen negativer Krümmung dehnen sich aus, Regionen positiver Krümmung ziehen sich zusammen und bilden Singularitäten.

Zoom: Reskaliere vor einer Singularität (Vol=1)

Perelman (2003): klassifiziert Singularitäten - nach Reskalierung Konvergenz gegen
a) Metrik mit konstanter positiver Krümmung, oder
b) $S^2 \times [a, b]$ ($\sim$ Zerlegung als zusammenhängende Summe).

Ricci-Fluß - Chirurgie

Ricci-Fluß mit Chirurgie:
- stoppe Fluß kurz vor Singularität,
- schneide Gebiete großer Krümmung ab,
- starte Ricci-Fluß mit neuer Mannigfaltigkeit.

M einfach zusammenhängend $\Rightarrow$
nach endlich vielen Chirurgien erhält man die leere Menge

Korollar 1 : *Poincaré-Vermutung.*

Ricci-Fluß für $t \to \infty$

Sei M eine beliebige 3-Mannigfaltigkeit.

Perelman (2003):

Es gibt nur eine diskrete Menge von Chirurgien. Der Ricci-Fluß mit Chirurgie konvergiert nach Reskalierung für $t \to \infty$ gegen eine Metrik mit Dick-Dünn-Zerlegung.

Diese entspricht der Jaco-Shalen-Johansson-Zerlegung entlang inkompressibler Tori in:
- hyperbolische Mannigfaltigkeiten (der dicke Teil der Mannigfaltigkeit) und
- andere lokal-homogene Mannigfaltigkeiten (der dünne Teil der Mannigfaltigkeit).