Integrationstheorie

Thilo Kuessner

Eichstätt, Winter 2020/21

Inhaltsverzeichnis

Folien: http://newton.kias.re.kr/~kuessner/mt.pdf

Prolog: Das Jordan-Maß.

In diesem Kapitel 0 definieren wir einen anschaulichen Volumenbegriff für "Elementarmengen" und sogenannte "Jordan-meßbare Mengen".

Für die Zwecke der höheren Mathematik (Funktionalanalysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, Geometrie "pathologischer" Mengen) ist dieser Begriff nicht ausreichend allgemein.

In der Vorlesung wird deshalb im Weiteren ein weniger anschaulicher Maßbegriff eingeführt, das Lebesgue-Maß.

Das Jordan-Maß wird nicht weiter verwendet, stimmt aber jedenfalls für Elementarmengen und Jordan-meßbare Mengen mit dem später einzuführenden Lebesgue-Maß überein und ist somit hilfreich zur Entwicklung einer Anschauung.

Quader

Ein Intervall I ist eine Teilmenge der Form $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ oder (a, b) im $\mathbb{R}^1$. Wir definieren in jedem Fall die Länge des Intervalls als $m(I) = |b - a|$.
Ein d-dimensionaler Quader im $\mathbb{R}^d$ ist eine Teilmenge der Form $B = I_1 \times \ldots \times I_d \subset \mathbb{R}^d$, wobei $I_1, \ldots, I_d$ jeweils Intervalle im $\mathbb{R}^1$ sind. Sein Volumen ist definiert als $m(B) = m(I_1) \cdot \ldots \cdot m(I_d)$.

Elementarmengen

Definition

Eine Elementarmenge ist eine disjunkte endliche Vereinigung von Quadern.

Bemerkung: Jede endliche Vereinigung von Quadern kann (nach Zerlegung der Quader in kleinere Quader) als disjunkte endliche Vereinigung geschrieben werden. Deshalb findet man in der Literatur auch die Definition, dass Elementarmengen endliche Vereinigungen von Quadern sind.

Definition

Für eine als Vereinigung endlich vieler disjunkter Quader $B_1, \ldots, B_k$ zerlegte Elementarmenge E definieren wir ihr Volumen als $m(E) = m(B_1) + \ldots + m(B_k)$.

Lemma

Das so definierte Volumen hängt nicht von der Zerlegung der Elementarmenge in Quader ab.

Beweisidee: Für Elementarmengen $E \subset \mathbb{R}^d$ beweisen wir die Formel $m(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^d} \sharp(E \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z}^d)$, aus der die Unabhängigkeit von der Zerlegung unmittelbar folgt.

Jordan-Maß

Für eine beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ definieren wir das innere Maß durch

$$m_*(A) = \sup \{m(E) \colon E \subset A, E \text{ Elementarmenge}\}$$

und das äußere Maß durch

$$m^*(A) = \inf \{m(E) \colon A \subset E, E \text{ Elementarmenge}\} .$$

Die Menge heißt Jordan-meßbar, wenn $m^*(A) = m_*(A)$.
In diesem Fall definieren wir

$$m(A) = m_*(A) = m^*(A).$$

Beispiele

Beispiel (Cantor-Menge)

Man unterteile das Intervall $[0, 1]$ *in drei Intervalle gleicher Länge und entferne das mittlere. Das selbe tue man mit den beiden übriggebliebeben Intervallen und wiederhole diese Prozedur unendlich oft. Das Jordan-Maß der Cantor-Menge ist* 0.

Beispiel

Die Menge der rationalen Zahlen in $[0, 1]$ *ist nicht Jordan-meßbar. Das innere Jordan-Maß ist* 0, *das äußere Jordan-Maß ist* 1.

Beispiel

Die Menge der irrationalen Zahlen in $[0, 1]$ *ist nicht Jordan-meßbar. Das innere Jordan-Maß ist* 0, *das äußere Jordan-Maß ist* 1.

Eigenschaften

Lemma

- $m(\emptyset) = 0$
- *Aus* $A \subset B$ *für Jordan-meßbare Mengen* A, B *folgt* $m(A) \leq m(B)$.
- *Translationsinvarianz: für alle Jordan-meßbaren Mengen* A *und alle* $x \in \mathbb{R}^d$ *gilt* $m(x + A) = m(A)$.
- *Für Jordan-meßbare Mengen* A, B *ist* $A \cup B$ *Jordan-meßbar und es gilt* $m(A \cup B) \leq m(A) + m(B)$.
- *Additivität: Für disjunkte Jordan-meßbare Mengen* A, B *gilt* $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

Beweisideee: Während die ersten drei Punkte direkt aus den Definitionen folgen, brauchen wir für die Punkte 4 und 5 (Subadditivität und Additivität) das folgende Lemma.

Lemma

Für eine Jordan-meßbare Menge A ist $m(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^d} \sharp(E \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z}^d)$.

Beweisidee: Wir beweisen die Ungleichungskette $m_*(A) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n^d} \sharp(A \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z}^d) \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^d} \sharp(A \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z}^d) \leq m^*(A)$, aus der wegen der Jordan-Meßbarkeit (d.h. $m_*(A) = m^*(A)$) unmittelbar die Behauptung folgt.

Anmerkung

Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^d} \sharp(A \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z}^d)$ *muss für eine beliebige Menge A nicht immer existieren. Wenn er existiert, muss er nicht translationsinvariant sein.*

Beispiele in den Übungen

Die folgenden Eigenschaften gelten NICHT für beliebige Jordan-messbare Mengen.

- Aus Jordan-Meßbarkeit abzählbar vieler Mengen A_i mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ folgt nicht immer die Jordan-Meßbarkeit ihrer Vereinigung und also im Allgemeinen auch nicht $\mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots$.
- Aus $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$ und $A_i \subset A_{i+1}$ für alle i folgt nicht immer $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$
- Aus $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$ und $A_{i+1} \subset A_i$ für alle i folgt nicht immer $\mu(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$

Die abzählbare Vereinigung und der abzählbare Durchschnitt Jordan-meßbarer Mengen müssen nicht Jordan-meßbar sein.

Wir werden in der Vorlesung eine allgemeinere Maß-Funktion definieren, die für Jordan-meßbare Mengen mit dem Jordan-Maß übereinstimmt.
Die zu definierende Maß-Funktion wird additiv für abzählbare Vereinigungen ("σ-additiv") sein.
Weil die rationalen Zahlen abzählbar sind, haben sie dann Maß 0.
Die irrationalen Zahlen in $[0, 1]$ haben dann das Maß 1.

Historisches

Das Lebesgue-Integral und Lebesgue-Maß wurden 1901 von Lebesgue in einer Notiz in den Comptes Rendus de l'Academie des Sciences eingeführt. Viele zeitgenössische Mathematiker hielten die Beschäftigung mit pathologischen (nicht-Riemannschen) Funktionen für überflüssig. Poincaré beklagte, dass man mit dem Erfinden von Funktionen heute keine sinnvollen Ziele mehr verfolge, sondern nur die Argumente der Väter in Zweifel ziehen wolle.
Das Lebesgue-Maß ist wichtig für den funktionalanalytischen Zugang zur Lösung partieller Differentialgleichungen, beginnend mit dem Satz von Riesz-Fischer (1907) und dem Rieszschen Darstellungssatz (1909).
Viele "pathologische" Mengen sind nicht Jordan-meßbar, aber Lebesgue-meßbar. Aber selbst viele offene Mengen oder kompakte Mengen sind nicht Jordan-meßbar. Hingegen sind offene oder kompakte Mengen stets Lebesgue-meßbar.

Philosophisches

Aus dem Auswahlaxiom folgt, dass es keine für alle Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ definierte Funktion gibt, die nichtnegative Werte annimmt, translationsinvariant und σ-additiv ist und auf Elementarmengen mit dem Jordan-Maß übereinstimmt.

Abstrakte Maßtheorie

Mengenalgebren

Definition

Eine σ-Algebra ist eine Familie $\mathcal{A}$ von Teilmengen einer Menge X, die folgende Axiome erfüllt:

- $X \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_i \in \mathcal{A}$ *für* $i = 1, 2, 3 \ldots \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Lemma

Für eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ gilt

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- *Sei* $n \in \mathbb{N}$ *und* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, *dann ist* $\cup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$
- *Endliche oder abzählbare Durchschnitte von Elementen in $\mathcal{A}$ gehören zu $\mathcal{A}$*
- *Aus $A, B \in \mathcal{A}$ folgt $A \setminus B \in \mathcal{A}$.*

Lemma

Zu einer Familie $\mathcal{E}$ von Teilmengen einer Menge X gibt es eine eindeutige kleinste σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$, die $\mathcal{E}$ enthält.

Lemma

Aus $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ folgt $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B})$.

Korollar (Prinzip der guten Mengen)

Sei $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ für eine Menge $\mathcal{E}$. Um zu beweisen, dass alle Elemente der σ-Algebra $\mathcal{A}$ die Eigenschaft P besitzen, genügt es zu beweisen, dass es eine σ-Algebra $\mathcal{G}$ gibt (die σ-Algebra der "guten Mengen"), für deren Mengen die Eigenschaft P gilt, und für die $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$ gilt.

Offene Mengen

Definition

Ein topologischer Raum ist eine Menge X mit einer Familie offener Mengen, so dass $\emptyset$ und X offene Mengen sind, endliche Durchschnitte und beliebige Vereinigungen offener Mengen wieder offen sind.

Beispiel

Für $X = \mathbb{R}^n$ nennt man eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ offen, wenn es zu jedem $x \in A$ eine ϵ-Kugel $B(x, \epsilon) \subset A$ gibt.

Lemma

Jede offene Menge $A \subset \mathbb{R}$ ist Vereinigung abzählbar vieler, disjunkter, offener Intervalle.

Lemma

Jede offene Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist Vereinigung abzählbar vieler fast-disjunkter (offener, halboffener oder abgeschlossener) Quader.

"fast disjunkt" heißt, dass es höchstens gemeinsame Punkte in Randflächen gibt (falls Quader abgeschlossen oder halboffen sind)

Borel-Mengen

Definition

Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{U}$ die Familie seiner offenen Mengen. Die kleinste $\mathcal{U}$ enthaltende σ-Algebra $\mathcal{B}$ heißt Borel-σ-Algebra, ihre Elemente heißen Borel-meßbare Mengen oder einfach Borel-Mengen.

Lemma

- *Jede abgeschlossene Menge ist eine Borel-Menge.*
- *Eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen ist eine Borel-Menge.*
- *Ein abzählbarer Durchschnitt offener Mengen ist eine Borel-Menge.*

Borel-Mengen im $\mathbb{R}^n$

Lemma

Die von offenen Intervallen erzeugte σ-Algebra ist die σ-Algebra aller Borel-Mengen in $\mathbb{R}$.

Lemma

Die von n-dimensionalen Quadern erzeugte σ-Algebra ist die σ-Algebra aller Borel-Mengen im $\mathbb{R}^n$.

Meßbare Abbildungen I

Definition

Ein Maßraum besteht aus einer Menge X und einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ von Teilmengen von X. Die Elemente der σ-Algebra heißen meßbare Mengen.

Definition

Eine Abbildung zwischen zwei Maßräumen heißt meßbar, wenn die Urbilder meßbarer Mengen meßbar sind.

Beispiel

Die charakteristische Funktion einer Teilmenge $A \subset X$ ist definiert durch

$$\chi_A(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{array} \right\}.$$

Sie ist genau dann eine meßbare Funktion, wenn A eine meßbare Menge ist.

Eigenschaften von Urbildern

Für beliebige Mengen gilt

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$$

$$f^{-1}\left(\cup_{i \in I} A_i\right) = \cup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$$

$$f^{-1}\left(\cap_{i \in I} A_i\right) = \cap_{i \in I} f^{-1}(A_i)$$

Korollar

Für eine beliebige Abbildung $f : X \to Y$ und eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf X ist

$$f_* \mathcal{A} := \left\{ B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \right\}$$

eine σ-Algebra auf Y.

Anmerkung

Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann messbar, wenn für die σ-Algebren $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ der messbaren Mengen auf X bzw. Y gilt

$$f_* \mathcal{A} = \mathcal{B}.$$

Meßbare Abbildungen II

Lemma

a) Wenn Y ein topologischer Raum mit der Borel-σ-Algebra ist, dann sind Abbildungen $f\colon X \to Y$ genau dann meßbar, wenn Urbilder offener Mengen meßbar sind.

b) Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ ist genau dann meßbar, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

i) für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $f^{-1}((a,\infty))$ eine meßbare Menge.

ii) für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $f^{-1}([a,\infty))$ eine meßbare Menge.

iii) für alle $b \in \mathbb{R}$ ist $f^{-1}((-\infty,b))$ eine meßbare Menge.

iv) für alle $b \in \mathbb{R}$ ist $f^{-1}((-\infty,b])$ eine meßbare Menge.

c) Eine Abbildung $f = (f_1,\ldots,f_n)\colon X \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann meßbar, wenn für alle $i = 1,\ldots,n$ die Abbildung $f_i\colon X \to \mathbb{R}$ meßbar ist.

Stetige Abbildungen

Definition

Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist stetig, wenn Urbilder offener Mengen offen sind.

Korollar

Wenn X und Y topologische Räume mit der von den offenen Mengen erzeugten σ-Algebren meßbarer Mengen sind, dann sind stetige Abbildungen meßbar.

Anmerkung

Für metrische Räume (z.B. $\mathbb{R}^n$) stimmt die obige Definition mit der $\epsilon - \delta$-Definition der Stetigkeit überein.

Meßbare Abbildungen III

Lemma

a) Wenn $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ meßbare Funktionen sind, dann sind auch

$$f + g, f \cdot g, max(f, g), min(f, g), |f|$$

meßbare Abbildungen.
b) Wenn $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ eine Folge meßbarer Funktionen ist, dann sind auch

$$\inf_n f_n, \sup_n f_n, \limsup_{n\to\infty} f_n, \liminf_{n\to\infty} f_n$$

meßbare Funktionen.

Maße

Definition

Ein Maß auf einer Menge X mit σ-Algebra $\mathcal{A}$ ist eine Funktion

$$\mu \colon \mathcal{A} \to [0, \infty] \,,$$

die den folgenden Axiomen genügt

- $\mu(\emptyset) = 0$
- μ *ist σ-additiv: für disjunkte meßbare Mengen* $A_i, i = 1, 2, 3 \ldots$ *gilt* $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$
- *es gibt eine meßbare Menge A mit* $\mu(A) < \infty$

Ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ besteht aus einer Menge X, einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ und einem Maß μ.

Für das Rechnen mit ∞ gelten die üblichen Konventionen:
$\infty + a = \infty, \infty + \infty = \infty.$

Eigenschaften von Maßen

Lemma

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann gilt

- *Aus $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ folgt $\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n)$.*
- *Aus $A, B \in \mathcal{A}$ und $A \subset B$ folgt $\mu(A) \leq \mu(B)$*
- *Aus $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$ und $A_i \subset A_{i+1}$ für alle i folgt $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$*
- *Aus $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$ und $A_{i+1} \subset A_i$ für alle i, sowie $\mu(A_1) < \infty$, folgt $\mu(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$*

Wahrscheinlichkeitsmaße

Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mit $\mu(X) = 1$. Die Menge X ist der Ergebnisraum, die σ-Algebra $\mathcal{A}$ die Menge der Ereignisse und das Maß μ das Wahrscheinlichkeitsmaß. Beispiele sind $X = \{\text{Kopf, Zahl}\}$ für das Werfen einer Münze, $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ für das Werfen eines Würfels oder $X = \{2, \ldots, 10, B, D, K, A\} \times \{\text{Karo, Herz, Pik, Kreuz}\}$ für das Ziehen einer Karte. Andere Beispiele wären eine Kreisscheibe für das Werfen eines Dartpfeils oder $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ für das zufällige Werfen einer Münze bis das erste Mal Zahl erscheint.

Das Lebesgue-Maß

Definition

Ein äußeres Maß ν ordnet jeder Teilmenge von X eine nichtnegative Zahl zu, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind

- $\nu(\emptyset) = 0$
- *Aus $A \subset B$ folgt $\nu(A) \leq \nu(B)$.*
- *Für beliebige Mengen A_i gilt $\nu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$.*

Lemma

Das äußere Lebesgue-Maß

$$\nu(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} m(W_i) \colon W_i \text{ Quader }, A \subset \cup_{i=1}^{\infty} W_i \right\}$$

definiert für beliebige Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ ist ein äußeres Maß.

Anders als beim äußeren Jordan-Maß werden hier abzählbare statt nur endlicher Vereinigungen zugelassen.

Lemma

Das äußere Lebesgue-Maß von Quadern und allgemeiner von fast-disjunkten Vereinigungen abzählbar vieler Quader stimmt mit dem Jordan-Maß überein.

Lemma

(Regularität) Für das äußere Lebesgue-Maß gilt

$$\nu(E) = \inf \{\nu(U) \colon E \subset U, U \text{ offen}\}$$

für jede Menge $E \subset \mathbb{R}^d$.

Definition des Lebesgue-Maßes

Für ein äußeres Maß ν auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ als ν-meßbar, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine offene Menge U mit $A \subset U$ und $\nu(U \setminus A) < \epsilon$ gibt.

Satz

Sei ν ein äußeres Maß auf einer Menge $\mathbb{R}^n$. Dann ist die Familie der ν-meßbaren Mengen eine σ-Algebra und ν definiert auf dieser Familie ein Maß.

Insbesondere kann man für ν das äußere Lebesgue-Maß verwenden und definiert so das Lebesgue-Maß.

In der Literatur findet man häufig auch die Caratheodory-Konstruktion: Für ein äußeres Maß ν bezeichnen wir eine Menge A als ν-meßbar, wenn $\nu(D) = \nu(D \cap A) + \nu(D \setminus A)$ für alle Mengen $D \subset X$ gilt. (Diese Konstruktion funktioniert für beliebige X, nicht nur für $\mathbb{R}^n$.)
Diese Definition ist äquivalent zu unserer Definition. Der Beweis dafür ist aber nicht trivial. Wir werden diese äquivalente Definition nicht benötigen.

Beispiele Lebesgue-meßbarer Mengen

Lemma

Offene Mengen sind Lebesgue-meßbar.

Definition

Eine Menge $N \subset \mathbb{R}^d$ *ist eine Nullmenge, wenn es zu jedem* $\epsilon > 0$ *eine abzählbare Vereinigung von Quadern* Q_i *mit* $N \subset \cup_i Q_i$ *und* $\Sigma_i m(Q_i) < \epsilon$ *gibt.*

Lemma

Jede Nullmenge ist Lebesgue-meßbar.

Lemma

Kompakte Mengen sind Lebesgue-meßbar.

Lemma

Die Lebesgue-meßbaren Mengen bilden eine σ-Algebra.

Korollar

Borel-Mengen im $\mathbb{R}^d$ sind Lebesgue-meßbar.

Korollar

Vereinigungen von Borel-Mengen und Nullmengen sind Lebesgue-meßbar.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}$ die Familie der Lebesgue-meßbaren Mengen und mit μ das äußere Lebesgue-Maß nur für Mengen in $\mathcal{L}$.

Satz

$(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}, \mu)$ *ist ein Maßraum.*

Das Lebesgue-Integral

Treppenfunktionen

Definition

Eine Funktion $s\colon X \to \mathbb{R}$ *heißt Treppenfunktion, wenn sie nur endlich viele Werte annimmt.*

Lemma

Zu einer meßbaren Funktion $f\colon X \to [0,\infty]$ *gibt es meßbare Treppenfunktionen* $s_n\colon X \to [0,\infty]$ *mit*

$$0 \le s_1(x) \le s_2(x) \le \ldots \le f(x)$$

für alle x *und*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

für alle x.

Lebesgue-Integral für nichtnegative Funktionen

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $E \in \mathcal{A}$ eine meßbare Menge. Für eine meßbare Treppenfunktion $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ mit $\alpha_i \in [0, \infty)$ und $A_i \in \mathcal{A}$ für alle i definieren wir

$$\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E \cap A_i).$$

Für eine beliebige meßbare Funktion $f : X \to [0, \infty)$ definieren wir

$$\int_E f d\mu = \sup_{s \le f} \int_E s d\mu,$$

wobei das Supremum über alle Treppenfunktionen mit $s(x) \le f(x)$ für alle x genommen wird.

Beispiel (Zählmaß)

Für den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ mit $\mu = \sum_{n=1}^\infty \delta_n$ gilt $\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^\infty f(n)$ für jede Funktion $f : \mathbb{N} \to [0, \infty)$.

Eigenschaften des Lebesgue-Integrals

Lemma

Für meßbare Funktionen $f, g : X \to [0, \infty)$ *und eine meßbare Menge* $E \subset X$ *gilt*

- *Wenn* $f(x) \leq g(x)$ *für alle* $x \in E$, *dann* $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$.
- $\int_E f d\mu = \int_X f \chi_E d\mu$
- *Wenn* $f(x) = 0$ *für alle* $x \in E$, *dann* $\int_E f d\mu = 0$.
- *Wenn* $\mu(E) = 0$, *dann* $\int_E f d\mu = 0$.
- *Wenn* $E \subset A$ *und* A *meßbar, dann* $\int_E f d\mu \leq \int_A f d\mu$.
- *Für* $c \in [0, \infty)$ *ist* $\int_E c f d\mu = c \int_E f d\mu$.

Additivität des Lebesgue-Integrals I

Lemma

a) Für meßbare Treppenfunktionen s, t *und eine meßbare Menge* E *gilt*

$$\int_E (s+t)d\mu = \int_E s d\mu + \int_E t d\mu.$$

b) Für eine meßbare Treppenfunktion s *und disjunkte meßbare Mengen* $E_1, E_2, E_3, \ldots$ *mit* $E = \bigcup_{i=1}^\infty E_i$ *gilt*

$$\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^\infty \int_{E_i} s d\mu.$$

Additivität des Lebesgue-Integrals II

Satz (Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz)

Sei $f_n \colon X \to [0,\infty)$ eine Folge meßbarer Funktionen mit $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ für alle x und alle n.
Definiere $f \colon X \to [0,\infty]$ durch $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
Dann ist f meßbar und

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Insbesondere braucht man zur Berechnung von $\int_X f d\mu$ nicht das Supremum über alle $s \le f$ zu nehmen. Es genügt, eine monoton wachsende Folge mit $f_n \to f$ zu betrachten.

Additivität des Lebesgue-Integrals III

Satz (σ-Additivität des Lebesgue-Integrals)

a) Für $f, g\colon X \to [0,\infty)$ meßbar und eine meßbare Menge E gilt

$$\int_E (f+g)d\mu = \int_E fd\mu + \int_E gd\mu.$$

b) Für eine Folge meßbarer Funktionen $f_n\colon X \to [0,\infty)$ mit $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ für alle x und eine meßbare Menge E gilt

$$\int_E fd\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_E f_i d\mu.$$

c) Für eine meßbare Funktion $f\colon X \to [0,\infty)$ und disjunkte meßbare Mengen $E_1, E_2, E_3, \ldots$ mit $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ gilt

$$\int_E fd\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} fd\mu.$$

Lebesgue-Integral für reellwertige Funktionen

Für eine Funktion $f \colon X \to \mathbb{R}$ sind

$$f^+(x) = max(f(x), 0), f^-(x) = max(0, -f(x))$$

Funktionen mit nichtnegativen Werten und es gilt

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x).$$

Wenn f meßbar ist, dann sind auch f^+, f^- meßbar. Wenn $\int_X |f| d\mu < \infty$ ist, dann sind auch $\int_x f^\pm d\mu$ endlich. Wir definieren dann

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

Eigenschaften des Lebesgue-Integrals

Lemma

Seien f, g Lebesgue-integrierbare Funktionen und E eine meßbare Menge.

- $\int_E (f+g)d\mu = \int_E fd\mu + \int_E gd\mu$ *und* $\int_E cfd\mu = c\int_E fd\mu$ *für* $c \in \mathbb{R}$.
- *Aus* $f \leq g$ *auf* E *folgt* $\int_E fd\mu \leq \int_E gd\mu$.
- $|\int_E fd\mu| \leq \int_E |f| d\mu$
- *Wenn* $E_1, E_2, E_3, \ldots$ *disjunkte meßbare Mengen mit* $E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ *sind, dann ist* $\int_E fd\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} fd\mu$.
- $\int_E fd\mu = \int_X f\chi_E d\mu$
- *Aus* $\mu(E) = 0$ *oder* $f\mid_E = 0$ *folgt* $\int_E fd\mu = 0$.

Konvergenzsätze

Monotone Konvergenz

Satz (Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz)

Sei $f_n \colon X \to [0,\infty)$ eine Folge meßbarer Funktionen mit $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ für alle x und alle n.
Definiere $f \colon X \to [0,\infty]$ durch $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
Dann ist f meßbar und

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Lemma von Fatou

Satz (Lemma von Fatou)

Für eine Folge meßbarer Funktionen $f_n \colon X \to [0, \infty)$ gilt

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Satz (Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz)

Sei g eine Lebesgue-integrierbare Funktion und f_n eine Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen mit

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

für alle x, die punktweise konvergiert: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Dann ist f Lebesgue-integrierbar und für jede meßbare Menge E gilt

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu.$$

σ-Additivität des Lebesgue-Integrals

Satz

Seien f_i integrierbare Funktionen, $|\sum_{i=1}^n f_i| \leq g$ für alle n und eine integrierbare Funktion g. Sei $f = \sum_{n=1}^\infty f_n$. Dann ist $\int_X |f| d\mu < \infty$ und

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^\infty \int_x f_n d\mu.$$

Lebesgue vs. Riemann

Satz

Riemann-integrierbare Funktionen sind Lebesgue-integrierbar und $\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu$ stimmt mit dem Riemann-Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ überein.

Produktmaße und der Satz von Fubini

Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ zwei Maßräume.
Das kartesische Produkt $X \times Y$ ist die Menge aller Paare (x, y) mit $x \in X, y \in Y$.
Die Produkt-σ-Algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ist die kleinste σ-Algebra auf $X \times Y$, die alle Mengen der Form $A \times B$ mit $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ enthält.

Lemma

Sei E eine $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-meßbare Menge und f eine $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-meßbare Funktion. Dann ist für jedes $x \in X$ die durch $f_x(y) = f(x,y)$ auf Y definierte Funktion $\mathcal{B}$-meßbar und $E_x = \{y \in Y \colon (x,y) \in E\}$ ist $\mathcal{B}$-meßbar. Entsprechend ist für jedes $y \in Y$ die durch $f_y(x) = f(x,y)$ auf X definierte Funktion $\mathcal{A}$-meßbar und $E_y = \{x \in X \colon (x,y) \in E\}$ ist $\mathcal{A}$-meßbar.

Produktmaß

Ein Maßraum heisst σ-endlich, wenn er die abzählbare Vereinigung von endlichen Maßräumen (d.h. mit $\mu(X) < \infty$) ist. Zum Beispiel ist dies der Fall für den $\mathbb{R}^n$, der abzählbare Vereinugung der Kugeln vom Radius n um den Nullpunkt ist.

Lemma

Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-endliche Maßräume. Dann ist Die Funktion $x \to \nu(E_x)$ eine $\mathcal{A}$-meßbare Funktion auf X, die Funktion $y \to \mu(E_y)$ ist eine $\mathcal{B}$-meßbare Funktion auf Y, und es gilt

$$\int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E_y) d\nu(y)$$

für alle $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Das Produktmaß $\mu \otimes \nu$ wird für $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ definiert durch

$$\mu \otimes \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E_y) d\nu(y).$$

Satz von Fubini

Satz

Sei f eine $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-meßbare Funktion auf $X \times Y$. Dann ist
$x \longrightarrow \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ *eine $\mathcal{A}$-meßbare Funktion,*
$y \longrightarrow \int_X f(x,y)d\mu(x)$ *eine $\mathcal{B}$-meßbare Funktion, und es gilt*

$$\int_{X\times Y} fd(\mu\otimes\nu) = \int_X (\int_Y f(x,y)d\nu(y))d\mu(x) = \int_Y (\int_X f(x,y)d\mu(x))d\nu($$

Prinzip von Cavalieri

Korollar

$$\mu(E) = \int_Y \mu(E_y) d\nu(y)$$

Korollar

Für eine meßbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ *ist* $M^f = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 \leq t < f(x)\right\}$ *meßbar und*

$$\mu_{n+1}(M^f) = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_n.$$

Anwendung: Berechnung des Volumens der n-dimensionalen Einheitskugel.

Transformation von Integralen

Integration in Polarkoordinaten

In Polarkoordinaten $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi$ gilt

$$\int\int f(x,y)dxdy = \int\int f(r,\phi)rdrd\phi.$$

Integration in Zylinderkoordinaten

In Zylinderkoordinaten $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi, z = z$ gilt

$$\int\int\int f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int f(r,\phi,z)rdrd\phi dz.$$

Integration in Kugelkoordinaten

In Kugelkoordinaten $x = r\cos\phi\sin\theta, y = r\sin\phi\sin\theta, z = r\cos\theta$ gilt

$$\int\int\int f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int f(r,\phi,\theta)r^2\sin\theta drd\phi d\theta.$$

Erinnerung: in Analysis II wurde

$$\int_a^b (f \circ \phi)(t)|\phi'(t)|dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx$$

für auf Intervallen definierte stetige f und stetig differenzierbare, monotone ϕ bewiesen. Weil die Intervalle die σ-Algebra der Borel-Mengen erzeugen und für Nullmengen beide Seiten Null sind, kann man daraus

$$\int_E f(\phi(t))|\phi'(t)|dt = \int_{\phi(E)} f(x)dx$$

für alle Lebesgue-meßbaren Mengen $E \subset \mathbb{R}$ herleiten. In diesem Kapitel geht es um den Beweis der analogen Transformationeformel im mehrdimensionalen Fall.

Transformationsformel

Satz

Sei $\phi\colon U \to V$ eine stetig differenzierbare Abbildung zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.
Wenn $f\colon V \to [0,\infty]$ Lebesgue-meßbar ist, dann ist $f \circ \phi\colon U \to [0,\infty]$ Lebesgue-meßbar und

$$\int_U (f \circ \phi)|det(d\phi)|dm = \int_V fdm.$$

Beweis - Schritt 1

Es genügt zu beweisen:

$$m(\phi(A)) = \int_A |det(d\phi)| dm$$

für jede meßbare Teilmenge $A \subset U$.

Beweis - Schritt 2

Es genügt zu zeigen: jedes $p \in U$ hat eine offene Umgebung $W_p \subset U$ mit

$$m(\phi(A)) = \int_A |det(d\phi)| dm$$

für jede meßbare Teilmenge $A \subset W_p$.

Beweis - Schritt 3

Beweis dieser Behauptung durch Induktion nach n. Sei o.B.d.A. $\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(p) \neq 0$. Sei $\psi(x) = (\phi_1(x), x_2, \ldots, x_n)$. Dann ist $\phi = \rho \circ \psi$ mit $\rho_1(y) = y_1$. Wenn die Behauptung für ρ und ψ gilt, dann auch für $\rho \circ \psi$. Für ρ und ψ zeigen wir die Behauptung nun mittels des Prinzips von Cavalieri.