Geometrische Gruppentheorie

Thilo Kuessner

Eichstätt, Sommer 2021

Inhaltsverzeichnis

Gruppentheoretische Grundlagen

Definition Gruppe

Definition

Eine Gruppe $(G, \circ)$ *besteht aus einer Menge* G *und einer Abbildung* $\circ\colon G \times G \to G$ *mit den folgenden Bedingungen:*

- *Assoziativgesetz:* $g \circ (h \circ k) = (g \circ h) \circ k$ *für alle* $g, h, k \in G$
- *Neutrales Element: es gibt ein* $e \in G$ *mit* $e \circ g = g = g \circ e$ *für alle* $g \in G$
- *Inverse: zu jedem* $g \in G$ *gibt es ein* $g^{-1} \in G$ *mit* $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$.

Wenn die Verknüpfung aus dem Kontext klar ist, schreibt mn meist nur G statt $(G, \circ)$. Oft wird auch gh statt $g \circ h$ geschrieben.

Beispiele I

Beispiel

$(\mathbb{N}, +)$ *ist keine Gruppe.*

Beispiel

$(\mathbb{Z}, +)$ *und* $(\mathbb{R}, +)$ *sind Gruppen.*

Die Addition ist assoziativ, 0 ist das neutrale Element, $-x$ ist das Inverse von x.

Beispiel

$(\mathbb{R}, \cdot)$ *ist keine Gruppe,*

Die Multiplikation ist assoziativ und 1 ist das neutrale Element, aber zu 0 gibt es kein Inverses.

Beispiel

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ *ist eine Gruppe.*

Beispiele II

Beispiel

$(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup)$ *ist keine Gruppe.*

Vereinigung von Mengen (hier: Teilmengen von $\mathbb{N}$) ist assoziativ, $\emptyset$ ist das neutrale Element, aber es gibt keine Inversen.

Beispiel

$(Mat(n, \mathbb{R}), \circ)$ *ist keine Gruppe.*

Matrix-Multiplikation ist assoziativ und die Einheitsmatrix ist das neutrale Element, aber nicht jede Matrix ist invertierbar.

Beispiel

$(GL(n, \mathbb{R}), \circ))$ *ist eine Gruppe.*

Elemente in $GL(n, \mathbb{R})$ sind die Matrizen $A \in Mat(n, \mathbb{R})$ mit $det(A) \neq 0$. Diese sind invertierbar, man kann A^{-1} mit der Cramerschen Regel berechnen und es gilt $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)} \neq 0$.

Abelsche Gruppen

Definition

Zwei Elemente a, b *einer Gruppe* G *kommutieren, wenn*

$$a \circ b = b \circ a$$

gilt. Eine Gruppe, in der alle Elemente kommutieren, heisst abelsch.

Beispiel

$(\mathbb{Z}, +)$ *und* $(\mathbb{R}, +)$ *sind abelsche Gruppen.*

Beispiel

Für $n \geq 2$ *ist* $(GL(n, \mathbb{R}), \circ)$ *keine abelsche Gruppe.*

Untergruppen I

Definition

$H \subset G$ ist eine Untergruppe, wenn $ab^{-1} \in H$ für alle $a, b \in H$ gilt.

Insbesondere ist dann $e \in H$, für alle $a \in H$ ist $a^{-1} \in H$, und für alle $a, b \in H$ ist $ab \in H$.

Untergruppen II

Beispiel

$(\mathbb{Z},+)$ *und* $(\mathbb{R},+)$ *sind Untergruppen von* $(\mathbb{C},+)$.

Beispiel

$(\mathbb{R}_+,\cdot)$ *ist eine Untergruppe von* $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$.

Beispiel

$GL(n,\mathbb{R})$ *ist eine Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{C})$.

Beispiel

$SL(n,\mathbb{R})=\{A\in Mat(n,\mathbb{R}):\ \det(A)=1\}$ *ist eine Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{R})$ *mit Matrizenmultiplikation.*

Das folgt aus $\det(AB^{-1})=\frac{\det(A)}{\det(B)}$.

Homomorphismen

Definition

Ein Homomorphismus zwischen zwei Gruppen G und H ist eine Abbildung $f\colon G \to H$ mit $f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2)$ für alle $g_1, g_2 \in G$.

Lemma

Sei $f\colon G \to H$ ein Homomorphismus. Dann ist

- $f(e_G) = e_H$.
- $f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$.

Homomorphismen: Beispiele I

Beispiel

Für $a \in \mathbb{Z}$ *ist*

$$f(n) = an$$

ein Homomorphismus $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Beispiel

Für $a \in \mathbb{R}$ *ist*

$$f(x) = ax$$

ein Homomorphismus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Homomorphismen: Beispiele II

Beispiel

Für $n \in \mathbb{Z}$ ist

$$f(x) = x^n$$

ein Homomorphismus $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$.

Beispiel

$$f(x) = e^x$$

ist ein Homomorphismus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.

Beispiel

$$f(A) = \det(A)$$

ist ein Homomorphismus $f : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Isomorphismen

Definition

Ein Isomorphismus zwischen zwei Gruppen G und H ist eine Bijektion, die ein Homomorphismus ist.

Lemma

Wenn f ein Isomorphismus ist, dann ist die Umkehrabbildung f^{-1} auch ein Isomorphismus.

Beweis: Die Umkehrabbildung einer Bijektion ist ebenfalls eine Bijektion. Zu $h_1, h_2 \in H$ sei $g_1 = f^{-1}(h_1), g_2 = f^{-1}(h_2)$. Dann ist $h_1 h_2 = f(g_1) f(g_2) = f(g_1 g_2)$, also
$f^{-1}(h_1 h_2) = g_1 g_2 = f^{-1}(h_1) f^{-1}(h_2)$.

Beispiel

$f(x) = e^x$ ist ein Isomorphismus $f \colon (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_+, \cdot)$.

Kern und Bild

Definition

Für einen Homomorphismus $f\colon G \to H$ *definieren wir seinen Kern als* $Ker(f) = \{g \in G\colon f(g) = e\}$ *und sein Bild als* $Im(f) = \{h \in H\colon \exists g \in G, f(g) = h\}$.

Beispiel

Für

$$\det\colon GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ist der Kern

$$Ker(\det) = SL(n, \mathbb{R})$$

und das Bild

$$Im(\det) = \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Faktorgruppen

Für eine Untergruppe $H \subset G$ definieren wir eine Äquivalenzrelation durch $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1 = g_2 h, h \in H$. Mit G/H bezeichnen wir die Menge der Äquivalenzklassen. Mit gH bezeichnen wir die Äquivalenzklasse von g.

Definition

Ein Normalteiler ist eine Untergruppe $H \subset G$ mit der Eigenschaft, dass $ghg^{-1} \in H$ für alle $h \in H$ gilt.

Beispiel

Für jeden Homomorphismus f ist $Ker(f)$ ein Normalteiler.

Lemma

Für einen Normalteiler $H \subset G$ ist die Äquivalenzklasse des Produkts von Elementen aus $g_1 H$ und $g_2 H$ wohldefiniert.

Mit dieser Verknüpfung wird G/H dann eine Gruppe.

Homomorphiesatz

Satz

Für einen Homomorphismus $f : G \longrightarrow H$ *ist* $G/Ker(f)$ *isomorph zu* $Im(f)$.

Definition

Eine Wirkung einer Gruppe G auf einer Menge X ist eine Abbildung $F\colon G \times X \to X$, für die (mit der Schreibweise $gx := F(g,x)$) gilt

- $ex = x$ *für alle* $x \in X$
- $g(hx) = (gh)x$ *für alle* $g, h \in G$ *und alle* $x \in X$

Beispiel

$GL(n, \mathbb{R})$ *wirkt auf dem Vektorraum* $\mathbb{R}^n$.

Beispiel (Konjugations-Homomorphismus)

Eine Gruppe G wirkt auf sich selbst durch $F(g,h) := ghg^{-1}$.

Bahn und Stabilisator

Eine Gruppe G wirke auf einer Menge X.
$Gx = \{g \cdot x \colon g \in G\}$ heisst der Orbit oder die Bahn von $x \in X$.
$G_x = \{g \in G \colon g \cdot x = x\}$ heisst die Standgruppe oder Isotropiegruppe von $x \in X$.

Lemma

$$gG_x \to g \cdot x$$

definiert eine Bijektion

$$G/G_x \to Gx.$$

(G_x muss kein Normalteiler sein.)

Beispiel

S_n/S_{n-1} *hat* n *Elemente.*

Isometriegruppen der Ebene und des Raumes

Euklidischer Raum

Als n-dimensionalen euklidischen Raum bezeichnen wir den $\mathbb{R}^n$ mit der Metrik

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Definition

Eine (euklidische) Isometrie ist eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$d(f(x), f(y)) = d(x,y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Lemma

Die Isometrien des euklidischen $\mathbb{R}^n$ bilden eine Gruppe $G = Isom(\mathbb{R}^n)$.

Für $p \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit G_p den Stabilisator von p, also

$$G_p = \{g \in G : g \cdot p = p\}.$$

Sei nun $n = 2$. Zu G_p gehören insbesondere Drehungen um p und Spiegelungen an Geraden durch p. Weil G_p eine Gruppe ist, müssen dann auch deren Produkte zu G_p gehören.

Lemma

Seien L_1 und L_2 Spiegelungen an zwei Geraden g_1 und g_2 durch p. Sei α der Winkel zwischen g_1 und g_2. Dann ist

$$L_1 \circ L_2 = R_{2\alpha}$$

die Drehung um p um den Winkel 2α.

Drehungen und Spiegelungen II

Lemma

Das Produkt zweier Drehungen um p ist eine Drehung um p:

$$R_\alpha \circ R_\beta = R_{\alpha+\beta}.$$

Lemma

Das Produkt der Drehung R_α um p um den Winkel α mit der Spiegelung an einer Geraden L_1 durch p ist die Spiegelung an der Geraden L_2 durch p, die mit L_1 den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ bildet.

Symmetrien des n-Ecks

Die Symmetrien des regelmässigen n-Ecks bilden die diedrische Gruppe D_n. Sie hat $2n$ Elemente, davon n Drehungen und n Spiegelungen.
Jede Symmetrie permutiert die Ecken, D_n ist also eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n. für $n = 3$ ist $D_3 = S_3$.
Für $n > 3$ ist $2n < n!$, also ist D_n eine echte Untergruppe von S_n.
D_n ist eine Untergruppe von $O(2)$, weil man die Ecken des regelmässigen n-Ecks auf einem Kreis anordnen kann.
Für $n \to \infty$ "konvergiert" das regelmässige n-Eck gegen den Kreis.
Die Symmetriegruppe des Kreises ist der Stabilisator von $(0, 0)$ in $Isom(\mathbb{R}^2)$.

Lemma

Gegeben seien drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ und drei Punkte $x', y', z' \in \mathbb{R}^2$ mit

$$d(x, y) = d(x', y')$$

$$d(x, z) = d(x', z')$$

$$d(y, z) = d(y', z')$$

Dann gibt es eine eindeutige Isometrie $f \in Isom(\mathbb{R}^2)$ mit

$$f(x) = x', f(y) = y', f(z) = z'.$$

Orientierungen

Wir nennen ein Paar von Vektoren (v_1, v_2) im $\mathbb{R}^2$ positiv orientiert, wenn sie eine Matrix mit positiver Determinante bilden, und negativ orientiert, wenn sie eine Matrix mit negativer Determinante bilden. Für eine Isometrie $f \in Isom(\mathbb{R}^2)$ und drei Punkte x, y, z können wir dann einerseits von der Orientierung der Vektoren $v_1 = y - x, v_2 = z - x$ und andererseits von der Orientierung der Bildvektoren $w_1 = f(y) - f(x), w_2 = f(z) - f(x)$ sprechen.
f heisst orientierungs-erhaltend, wenn es positiv orientierte Paare von Vektoren in positiv orientierte Paare und negativ orientierte Paare von Vektoren in negativ orientierte Paare abbildet.
Verschiebungen und Drehungen sind orientierungs-erhaltend, Spiegelungen hingegen nicht.

Lemma

Die orientierungs-erhaltenden Isometrien bilden eine Untergruppe $Isom^+(\mathbb{R}^2) \subset Isom(\mathbb{R}^2)$.

Untergruppen der Isometriegruppe

Lemma

Die Verschiebungen bilden einen Normalteiler $\mathcal{T} \subset Isom^+(\mathbb{R}^2)$. Man hat einen Isomorphismus $\mathcal{T} \simeq \mathbb{R}^2$.

Lemma

Die Drehungen um $(0,0)$ bilden eine Untergruppe $SO(2) \subset Isom^+(\mathbb{R}^2)$.

Lemma

Drehungen um $(0,0)$ und Spiegelungen an Geraden durch $(0,0)$ bilden eine Untergruppe $O(2) \subset Isom(\mathbb{R}^2)$.

Lemma

Jedes Element $f \in Isom^+(\mathbb{R}^2)$ ist von der Form $f = T_v R_\alpha$ mit $T_v \in \mathcal{T}, R_\alpha \in SO(2)$.

Korollar

Jedes Element $f \in Isom(\mathbb{R}^2)$ ist von der Form $f = TS$ mit $T \in \mathcal{T}, S \in O(2)$.

Beweis: Beide Behauptungen lassen sich darauf zurückführen, dass Isometrien durch die Bilder dreier nicht auf einer Geraden liegender Punkte bereits eindeutig festgelegt sind.

Definition

Eine Gruppe G heisst semidirektes Produkt $G = H \rtimes K$ ihrer Untergruppen H und K, wenn gilt:

- *H ist ein Normalteiler*
- *$G = HK$, d.h. jedes $g \in G$ ist $g = hk$ mit $h \in H, k \in K$*
- *$H \cap K = \{e\}$*

Aus $H \cap K = \{e\}$ folgt, dass die Zerlegung $g = hk$ eindeutig ist. Aus $g_1 = h_1 k_1$ und $g_2 = h_2 k_2$ bekommt man für $g_1 g_2$ die eindeutige Zerlegung

$$g_1 g_2 = (h_1 k_1 h_2 k_1^{-1})(k_1 k_2).$$

Die Gruppenoperation auf dem semidirekten Produkt $H \rtimes K$ ist also durch den Konjugations-Homomorphismus $K \rightarrow Aut(H)$ festgelegt.

Die Isometriegruppe als semidirektes Produkt

Satz

Wir haben Isomorphismen

$$Isom^+(\mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)$$

$$Isom(\mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{R}^2 \rtimes O(2)$$

Beweis: Wir wissen, dass jede Isometrie ein Produkt aus einer Verschiebung und einem Element in $O(2)$ ist, sowie jede orientierungs-erhaltende Isometrie ein Produkt aus einer Verschiebung und einem Element in $SO(2)$.
Anmerkung: Die Konjugation mit einer Drehung oder Spiegelung $A \in O(2)$ bildet die Verschiebung T_v in die Verschiebung T_{Av} ab.

Diskrete Untergruppen

Definition

Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^2$ ist diskret, wenn sie keine Häufungspunkte hat. Eine Untergruppe $\Gamma \subset Isom(\mathbb{R}^2)$ ist diskret, wenn die Bahn jedes Punktes diskret ist.

Beispiel

$\mathbb{Z}^2$ und allgemein jedes von zwei linear unabhängigen Vektoren aufgespannte Gitter ist eine diskrete Untergruppe von $\mathcal{T} \simeq \mathbb{R}^2$.

Beispiel

Endliche Untergruppen sind diskret. Insbesondere ist für eine rationale Zahl $\frac{p}{q}$ die zyklische Gruppe der Drehungen um Vielfache von $\alpha = \frac{p}{q}\pi$ diskret. Ebenso ist die diedrische Gruppe diskret.

Satz

Eine diskrete Untergruppe von $\mathcal{T} \cong \mathbb{R}^2$ ist entweder

- *die triviale Gruppe (nur das neutrale Element)*
- *eine von einer Verschiebung erzeugte (zu $\mathbb{Z}$ isomorphe) Gruppe*
- *eine von zwei linear unabhängigen Verschiebungen erzeugte abelsche Gruppe isomorph zu $\mathbb{Z}^2$*

Satz

Jede endliche Untergruppe von $Isom(\mathbb{R}^2)$ ist zyklisch oder diedrisch.

Beweis: Eine endliche Gruppe kann keine Verschiebungen enthalten, muss also eine Untergruppe von $O(2)$ sein. Die endlichen Untergruppen von $O(2)$ können ähnlich wie die diskreten Untergruppen von $\mathbb{R}$ klassifiziert werden.

Isometrien des $\mathbb{R}^3$

Lemma

Gegeben seien vier nicht in einer Ebene liegende Punkte $x, y, z, w \in \mathbb{R}^3$ *und vier Punkte* $x', y', z', w' \in \mathbb{R}^3$ *mit*

$$d(x,y) = d(x',y'), d(x,w) = d(x',w')$$

$$d(x,z) = d(x',z'), d(y,w) = d(y',w')$$

$$d(y,z) = d(y',z'), d(z,w) = d(z',w')$$

Dann gibt es eine eindeutige Isometrie $f \in Isom(\mathbb{R}^3)$ *mit*

$$f(x) = x', f(y) = y', f(z) = z', f(w) = w'.$$

Beispiel

Die Symmetriegruppe eines regelmässigen Tetraeders ist isomorph zur symmetrischen Gruppe S_4.

Beispiel

Die Symmetriegruppe eines regelmässigen Würfels oder Oktaeders ist isomorph zu $S_4 \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Beispiel

Die Symmetriegruppe eines regelmässigen Dodekaeders oder Ikosaeders ist isomorph zu $A_5 \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Topologische Grundlagen

Offene Mengen

Definition

Ein topologischer Raum ist eine Menge X mit einer Familie offener Mengen, so dass $\emptyset$ und X offene Mengen sind, und endliche Durchschnitte und beliebige Vereinigungen offener Mengen wieder offen sind.

Beispiel

Für $X = \mathbb{R}^n$ nennt man eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ offen, wenn es zu jedem $x \in A$ eine ϵ-Kugel $B(x, \epsilon) \subset A$ gibt.

Definition

Auf einer Teilmenge $A \subset X$ eines topologischen Raums X definiert man eine Topologie wie folgt: $V \subset A$ ist genau dann offen, wenn es von der Form $V = A \cap U$ für eine offene Menge $U \subset X$ ist.

Beispiel

Eine offene Menge in einem metrischen Raum (X, d) *ist eine Menge* $U \subset X$*, die zu jedem* $x \in U$ *eine* ϵ*-Kugel* $B(x, \epsilon) \subset U$ *für ein hinreichend kleines* $\epsilon > 0$ *enthält. Mit diesen offenen Mengen ist* X *ein topologischer Raum.*

Beispiel

Nicht jeder topologische Raum ist metrisierbar. Ein Beispiel ist die Zariski-Topologie auf $\mathbb{Z}$*, deren offene Mengen genau die Komplemente endlicher Teilmengen und* $\emptyset$ *sind.*

Lemma

Jede offene Menge $A \subset \mathbb{R}$ ist Vereinigung abzählbar vieler, disjunkter, offener Intervalle.

Lemma

Jede offene Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist Vereinigung abzählbar vieler fast-disjunkter (offener, halboffener oder abgeschlossener) Quader.

"fast disjunkt" heißt, dass es höchstens gemeinsame Punkte in Randflächen gibt (falls Quader abgeschlossen oder halboffen sind)

Stetige Abbildungen

Definition

Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen $f : X \to Y$ ist stetig, wenn Urbilder offener Mengen offen sind.

Beispiel

Die Identitätsabbildung $f(x) = x$ ist eine stetige Abbildung.

Lemma

Die Verknüpfung stetiger Abbildungen ist stetig.

Lemma

Wenn $f : X \to Y$ stetig und $A \subset X$ eine Teilmenge ist, dann ist $f\mid_A : A \to Y$ stetig bzgl. der Teilraumtopologie.

Homöomorphismen

Definition

Ein Homöomorphismus ist eine Bijektion $f : X \rightarrow Y$, bei der f und f^{-1} stetig sind. Topologische Räume heissen homöomorph, wenn es einen Homöomorphismus zwischen ihnen gibt.

Beispiel

Die Kreisfläche ist homöomorph zur Quadratfläche. Der Buchstabe C ist homöomorph zum Buchstaben S, die Ziffer 4 homöomorph zum Buchstaben Q.

Zusammenhang

Definition

Ein topologischer Raum heisst zusammenhängend, wenn er sich nicht in zwei nicht-leere, offene, disjunkte Teilmengen zerlegen lässt.

Lemma

Das Intervall $[0, 1]$ *ist zusammenhängend.*

Mit demselben Beweis erhält man, dass jedes offene, halboffene oder abgeschlossene Intervall zusammenhängend ist.

Lemma

Stetige Bilder zusammenhängender Räume sind zusammenhängend.

Wegzusammenhang

Definition

Ein topologischer Raum X heisst wegzusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $w\colon [0,1] \to X$ mit $w(0) = x, w(1) = y$ gibt.

Lemma

Wegzusammenhängende Räume sind zusammenhängend.

Beweis: Angenommen, es gäbe eine Zerlegung in disjunkte, offene Mengen U und V. Dann könnte man einen Punkt in U mit einem Punkt in V verbinden und erhielte einen durch U und V überdeckten Weg w. Die Urbilder $w^{-1}(U)$ und $w^{-1}(V)$ sind eine Überdeckung des Intervalls durch disjunkte, offene Mengen, die es aber nicht geben kann.

Kompaktheit I

Definition

Ein topologischer Raum ist kompakt, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat.

Lemma

Stetige Bilder kompakter Räume sind kompakt.

Lemma

Abgeschlossene Teilmengen kompakter Räume sind kompakt.

Kompaktheit II

Lemma

Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in K eine in K konvergente Teilgokge hat.

Satz

Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Produkttopologie

Seien X und Y topologische Räume. $X \times Y$ ist die Menge der Paare (x, y) mit $x \in X, y \in Y$. Eine Menge $W \subset X \times Y$ heisst offen, wenn es zu jedem $(x, y) \in W$ eine offene Umgebung U von x in X und eine offene Umgebung V von y in Y gibt, so dass

$$U \times V \subset W.$$

Diese Topologie heisst Produkttopologie.
Zum Beispiel ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Produkttopologie der $\mathbb{R}^2$, und $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ mit der Produkttopologie ist der $\mathbb{R}^3$.

Lemma

Eine Abbildung $f = (f_1, f_2)\colon Z \to X \times Y$ ist genau dann stetig, wenn $f_1\colon Z \to X, f_2\colon Z \to Y$ beide stetig sind.

Quotiententopologie I

Definition

Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Sei $p(x) = [x]$ die kanonische Projektion $p\colon X \to X/\sim$, welche jedem Punkt x seine Äquivalenzklasse $[x]$ zuordnet. Auf dem Faktorraum $X/\sim$ definieren wir eine Topologie durch die Bedingung, dass $U \subset X/\sim$ genau dann offen ist, wenn $p^{-1}(U) \subset X$ offen ist. Diese Topologie heisst Quotiententopologie.

Quotiententopologie II

Beispiel

Auf $\mathbb{R}$ definieren wir eine Äquivalenzrelation durch

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

Der Quotientenraum $\mathbb{R}/\sim$ ist homöomorph zum Kreis.

Lemma

Eine Abbildung $f\colon X/\sim \to Y$ ist genau dann stetig, wenn $f \circ p\colon X \to Y$ stetig ist.

Definition

Eine topologische Gruppe ist eine Gruppe G, die ein topologischer Raum ist, so dass die durch $(a, b) \rightarrow ab^{-1}$ definierte Abbildung $G \times G \rightarrow G$ stetig ist.

Insbesondere sind dann Gruppenmultiplikation und Inversion stetige Abbildungen.

Beispiel

Der Kreis wird vermittels der Bijektion $S^1 = SO(2)$ zu einer topologischen Gruppe.

Homogene Räume

Definition

Sei H Untergruppe einer topologischen Gruppe, dann heisst der Faktorraum G/H homogener Raum.

G/H ist nur dann eine Gruppe, wenn H ein Normalteiler ist.

Beispiel

$\mathbb{R}^2$ *ist ein homogener Raum wegen* $\mathbb{R}^2 = Isom(\mathbb{R}^2)/O(2)$.

$G/H = \mathbb{R}^2$ ist hier eine Gruppe, aber nicht mit der Verknüpfung auf $G = Isom(\mathbb{R}^2)$ kompatibel: $O(2)$ ist kein Normalteiler.

Beispiel

$O(n)/(O(k) \times O(n-k))$ *ist ein homogener Raum, der im Allgemeinen keine Gruppe ist.*

Dieser homogene Raum kann mit der Menge der k-dimensionalen Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$ identifiziert werden. Er heisst Grassmann-Mannigfaltigkeit $Gr(n,k)$.

Definition

Sei G eine topologische Gruppe und X ein topologischer Raum. Eine stetige Gruppenwirkung ist eine Wirkung, die durch eine stetige Abbildung $F\colon G \times X \to X$ gegeben ist.

$F(g, x)$ wird wieder als $g \cdot x$ bezeichnet. Man hat also

- $e \cdot x = x$ für das neutrale Element $e \in G$ und alle $x \in X$
- $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ für alle $g, h \in G, x \in X$.

$Gx := \{g \cdot x\colon g \in G\}$ heisst der Orbit oder die Bahn von $x \in X$.

Gruppenwirkungen II

Der Quotientenraum X/G wird als Orbitraum oder Bahnenraum bezeichnet. $G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$ heisst die Standgruppe oder Isotropiegruppe von $x \in X$.

Lemma

Sei G kompakt und Gx ein metrischer Raum.

$$gG_x \to g \cdot x$$

definiert eine stetige Bijektion

$$G/G_x \to Gx.$$

Topologie von Matrizengruppen

Orthogonale Gruppe

Eine euklidische Isometrie des $\mathbb{R}^n$, die den Nullpunkt auf sich abbildet, ist eine lineare Abbildung, die das Standard-Skalarprodukt erhält. Insbesondere sind die Spalten Ae_i der Matrix A eine Orthonormalbasis. Dies ist äquivalent zu $A^T A = Id$. Matrizen A mit $AA^T = Id$ heissen orthogonal. Die orthogonalen $n \times n$-Matrizen bilden eine Gruppe, die mit $O(n)$ bezeichnet wird. Die Determinante einer orthogonalen Matrix ist ± 1. Die orthogonalen $n \times n$-Matrizen mit Determinante 1 bilden eine Untergruppe, die mit $SO(n)$ bezeichnet wird ("spezielle orthogonale Gruppe").

Unitäre Gruppe

Auf dem $\mathbb{C}^n$ hat man das hermitesche Produkt

$$\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w}_j .$$

Dieses hat die Eigenschaften $\langle w, w \rangle \geq 0$ mit Gleichheit nur für $w = 0$, $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$, $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ und $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$ für $\lambda \in \mathbb{C}$. Die Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ des $\mathbb{C}^n$ ist orthonormal bzgl. dieses Produkts.
Wenn eine lineare Abbildung das hermitesche Produkt erhält, dann sind insbesondere die Spalten Ae_i der Matrix A orthonormal bzgl. des hermiteschen Produkts, d.h. es gilt $A\overline{A}^T = Id$. Solche Matrizen heissen unitär. Die unitären $n \times n$-Matrizen bilden eine Gruppe, die mit $U(n)$ bezeichnet wird.
Die Determinante einer unitären Matrix erfüllt $|\det(A)| = 1$. Die unitären $n \times n$-Matrizen mit Determinante 1 bilden eine Untergruppe, die mit $SU(n)$ bezeichnet wird ("spezielle unitäre Gruppe").

Topologie von Matrizengruppen

Die Menge $Mat(n, \mathbb{C})$ kann mit $\mathbb{C}^{n^2}$ identifiziert werden und wird so zu einem topologischen Raum. Wir versehen jede Teilmenge mit der Teilraumtopologie. Mit dieser Topologie werden sowohl $GL(n, \mathbb{C})$ als auch jede Untergruppe zu einer topologischen Gruppe, d.h. die Gruppenmultiplikation und die Inversion sind stetige Abbildungen. Dies folgt aus den expliziten Formeln für Matrizenmultiplikation und Matrizeninversion.
Insbesondere gilt für eine Folge von Matrizen $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ genau dann, wenn für jedes Paar (i, j) die Folge der (i, j)-Einträge der A_n gegen den (i, j)-Eintrag von A konvergiert. Beispielsweise ist $\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Kompaktheit von Matrizengrupepn

Satz

Die Gruppen

$$O(n), SO(n), U(n), SU(n)$$

sind kompakt.
Die Gruppen

$$GL(n,\mathbb{R}), SL(n,\mathbb{R}), GL(n,\mathbb{C}), SL(n,\mathbb{C})$$

sind mit Ausnahme von $SL(1,\mathbb{R}), SL(1,\mathbb{C})$ *nicht kompakt.*

Satz

$GL(n,\mathbb{R})$ und $O(n)$ sind nicht wegzusammenhängend,

$$SL(n,\mathbb{R}), GL(n,\mathbb{C}), SL(n,\mathbb{C}), SO(n), U(n), SU(n)$$

sind wegzusammenhängend.

Fundamentalgruppe und Überlagerungen

Für eine positive reelle Zahl $r > 0$ ist $r\mathbb{Z} = \{rz\colon z \in \mathbb{Z}\}$ eine Untergruppe von $\mathbb{R}$. Der Quotient $\mathbb{R}/r\mathbb{Z}$ ist ein Kreis der Länge r. Für unterschiedliche r sind diese Kreise homöomorph, aber nicht isometrisch.

Die Multiplikation mit $\frac{r_2}{r_1}$ ist eine stetige Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die $r_1\mathbb{Z}$ auf $r_2\mathbb{Z}$ abbildet. Sie induziert also eine stetige Abbildung $\mathbb{R}/r_1\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/r_2\mathbb{Z}$. Ihre Umkehrabbildung ist die Multiplikation mit $\frac{r_1}{r_2}$, diese induziert eine stetige Abbildung $\mathbb{R}/r_2\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/r_1\mathbb{Z}$. Die beiden stetigen Abbildungen sind Umkehrabbildungen voneinander, also Hoöomorphismen. Die beiden Kreise sind aber nicht isometrisch.

Tori

Für ein Gitter (eine von zwei linear unabhängigen Vektoren v_1, v_2 erzeugte Untergruppe) $L \subset \mathbb{R}^2$ ist der Quotientenraum $\mathbb{R}^2/L$ ein Torus. Die Länge des Meridians und der Longitude ist die Länge der beiden L erzeugenden Vektoren. Zum Beispiel haben für $L = \mathbb{Z}^2$ Longitude und Meridian beide Länge 1.

Sei A die lineare Abbildung, die $(1,0)$ auf v_1 und $(0,1)$ auf v_2 abbildet. Diese Abbildung ist stetig und bildet $\mathbb{Z}^2$ auf L ab. Sie induziert also eine stetige Abbildung $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2/L$. Weil v_1, v_2 linear unabhängig sind, ist A invertierbar. Die inverse lineare Abbildung induziert eine stetige Umkehrabbildung $\mathbb{R}^2/L \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Die beiden Tori sind also homöomorph.

Falls v_1, v_2 nicht orthonormal sind, ist diese Abbildung keine Isometrie. Es könnte aber sein, dass die Tori trotzdem isometrisch sind. Man kann zeigen, dass dies der Fall ist, wenn die aus den Vektoren gebildete Matrix zu $SL(2, \mathbb{Z})$ gehört.

Geschlossene Wege auf dem Torus I

Wir betrachten den Torus $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ und den Punkt x_0, der der Äquivalenzklasse von $\mathbb{Z}^2$ entspricht. Ein geschlossener Weg an x_0 ist ein Weg $w\colon [0,1] \to T^2$ mit $w(0) = w(1) = x_0$. Jeder solche Weg lässt sich hochheben zu einem eindeutigen Weg $\widetilde{w}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\widetilde{w}(0) = (0,0)$ und $\widetilde{w}(1) \in \mathbb{Z}^2$.

Geschlossene Wege auf dem Torus II

In $\mathbb{R}^2$ lassen sich zwei Wege mit denselben Endpunkten durch eine stetige Familie von Wegen mit denselben Endpunkten ineinander deformieren: die vom Parameter s stetig abhängende Familie $\widetilde{w}_s(t) := (1-s)\widetilde{w}_0(t) + s\widetilde{w}_1(t)$ beginnt für $s=0$ mit $\widetilde{w}_0$ und endet für $s=1$ mit $\widetilde{w}_1$.
Insbesondere lassen sich zwei geschlossene Wege w_0, w_1 an x_0 in T^2 stetig ineinander deformieren, wenn ihre in $(0,0)$ startenden Hochhebungen $\widetilde{w}_0, \widetilde{w}_1$ dieselben Endpunkte in $\mathbb{Z}^2$ haben.
Umgekehrt lassen sich zwei Hochhebungen mit unterschiedlichen Endpunkten offensichtlich nicht so ineinander deformieren, dass während der Deformation die Start- und Endpunkte jederzeit in $\mathbb{Z}^2$ liegen. Das wäre aber notwendig, wenn man die Wege in T^2 mit festbleibenden Start- und Endpunkten in x_0 ineinander deformieren wollte.
Diese Ideen werden wir im folgenden mit präzisen Definitionen für beliebige topologische Räume formalisieren.

Definition

Sei X ein topologischer Raum, $x_0 \in X$. Wir sagen, dass zwei Wege, d.h. stetige Abbildungen

$$w_0, w_1 \colon [0,1] \to X$$

mit $w_0(0) = w_0(1) = x_0, w_1(0) = w_1(1) = x_0$ homotop rel. x_0 sind, wenn es eine stetige Abbildung

$$H \colon [0,1] \times [0,1] \to X$$

gibt mit

$$H(0,t) = w_0(t), H(1,t) = w_1(t) \ \forall t \in [0,1]$$

und

$$H(s,0) = H(s,1) = x_0 \ \forall s \in [0,1].$$

Homotopie von geschlossenen Wegen II

Man sagt dann, H ist eine Homotopie rel. x_0 zwischen w_0 und w_1 und schreibt dafür $w_0 \sim w_1$.

Lemma

Homotopie rel. x_0 ist eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzklassen heissen Homotopieklassen von Wegen.

Verknüpfung von Wegen

Definition

Seien $w_1, w_2 [0,1] \to X$ zwei Wege. Ihre Verknüpfung $w_1 * w_2 [0,1] \to X$ ist der Weg definiert durch

$$w_1 * w_2(t) := \left\{ \begin{array}{cc} w_1(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ w_2(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{array} \right\}.$$

Lemma

Aus $w_0 \sim w_1$ folgt $w_0 * w_2 \sim w_1 * w_2$. Aus $w_2 \sim w_0$ folgt $w_1 * w_2 \sim w_1 * w_0$.

Die Verknüpfung von Wegen ist also wohl-definiert auf Homotopieklassen.

Lemma

Sei X ein topologischer Raum, $x_0 \in X$. Die Homotopieklassen (relativ x_0) geschlossener Wege mit Start- und Endpunkt x_0 bilden mit der Verknüpfung $*$ eine Gruppe.

Beweis: Das neutrale Element ist die Homotopieklasse des konstanten Wegs, das inverse Element zur Homotopieklasse von $w(t)$ ist die Homotopieklasse von $w(1-t)$. Das Assoziativgesetz $w_1 * (w_2 * w_3) \sim (w_1 * w_2) * w_3$ beweist man mit der Homotopie

$$H(s,t) = \left\{ \begin{array}{cc} w_1((s+1)t) & 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4} \\ w_2(t - \frac{s+1}{4}) & \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+1}{2} \\ w_3(1-(s+1)t) & \frac{s+1}{2} \leq t \leq 1 \end{array} \right\}$$

Man bezeichnet diese Gruppe als Fundamentalgruppe von X im Basispunkt x_0, als Symbol $\pi_1(X, x_0)$.

Lemma

Wenn X wegzusammenhängend ist, dann sind für $x_0, x_1 \in X$ die Fundamentalgruppen $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ zueinander isomorph.

Man bezeichnet die Fundamentalgruppe dann oft einfach als $\pi_1 X$.

Beispiel

$\pi_1 \mathbb{R}^n = 0$.

Beispiel

$\pi_1 S^1 = \mathbb{Z}$.

Beispiel

$\pi_1 T^2 = \mathbb{Z}^2$.

Überlagerungen

Eine Überlagerung von X soll eine stetige, surjektive Abbildung $\pi\colon Y \to X$ sein, die lokal um jeden Punkt von X so aussieht wie die Projektion von einer disjunkten Vereinigung von Kopien von X auf X.

Definition

Eine Überlagerung von X ist eine stetige, surjektive Abbildung $\pi\colon Y \to X$, bei der es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subset X$ und einen diskreten Raum Λ mit einem Homöomorphismus $h\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \Lambda$ gibt, so dass für jedes $y \in \pi^{-1}(U)$ ein $\lambda \in \Lambda$ mit

$$h(y) = (\pi(y), \lambda)$$

existiert.

Dabei ist ein diskreter Raum eine Menge mit der diskreten Topologie, also der Topologie, in der jede Menge offen ist. (Diese wird induziert von der diskreten Metrik, wo $d(x,y) = 1$ für alle $x \neq y$ ist.)

Hochhebung von Wegen

Lemma

Sei $\pi\colon Y \to X$ eine Überlagerung und $w\colon [0,1] \to X$ ein Weg, dann gibt es zu jedem $y \in Y$ mit $\pi(y) = w(0)$ einen eindeutigen Weg $\tilde{w}\colon [0,1] \to Y$ mit $\tilde{w}(0) = y$ und $\pi \circ \tilde{w} = w$.

Beweis: Solange w in der durch die Definition von Überlagerungen gegebenen Umgebung U mit $\pi^{-1}(U) \simeq U \times \Lambda$ verbleibt, gibt es zu jedem Element von Λ eine Hochhebung, insbesondere eine eindeutige Hochhebung zu gegebenem Startpunkt y. Wir überdecken dann $[0,1]$ durch endlich viele Teilintervalle, auf denen w innerhalb einer solchen Umgebung verbleibt und können dann die eindeutige Hochhebung sukzessive fortsetzen.

$\tilde{w}$ heisst die Hochhebung von w zum Startpunkt y.

Eigentlich diskontinuierliche Wirkungen

Definition

Eine Wirkung $G \times X \to X$ heisst eigentlich diskontinuierlich, wenn es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ gibt, so dass

$$\sharp \{ g \in G \colon gU \cap U \neq \emptyset \} < \infty.$$

Definition

Eine Wirkung $G \times X \to X$ heisst frei, wenn für $g \neq e$ stets $gx \neq x$ für alle $x \in X$ gilt.

Beispiel

Die Wirkungen von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Z}^2$ auf $\mathbb{R}^2$ sind frei und eigentlich diskontinuierlich. Die Wirkung von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}^2$ durch Drehungen um Vielfache von $\frac{2\pi}{n}$ ist eigentlich diskontinuierlich, aber nicht frei.

Satz

Für eine eigentlich diskontinuierliche und freie Wirkung $G \times X \to X$ ist die Projektion $X \to X/G$ eine Überlagerung.

Hyperbolische Ebene

Die Gruppe $SL(2,\mathbb{R})$ wirkt auf der oberen Halbebene $H^2 = \{z \in \mathbb{C} \colon Im(z) > 0\}$ durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z := \frac{az+b}{cz+d}.$$

Sie erhält die hyperbolische Metrik.
Die Untergruppe $SL(2,\mathbb{Z})$ wirkt eigentlich diskontinuierlich, aber nicht frei. Allgemeiner wirken alle diskreten Untergruppen $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{R})$ eigentlich diskontinuierlich. Man kann zeigen, dass es zu jedem $g \geq 2$ diskrete Untergruppen $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{R})$ gibt, so dass H^2/Γ eine geschlossene Fläche mit g Henkeln ist.

Cayley-Graphen und Quasi-Isometrien

Erzeugendensysteme

Ein Erzeugendensystem einer Gruppe G ist eine Teilmenge $E \subset G$, so dass jedes Element aus G als Produkt von Elementen aus E und ihren Inversen dargestellt werden kann.
Ein symmetrisches Erzeugendensystem ist ein Erzeugendensystem, bei dem zu jedem Element aus E auch das Inverse zu E gehört.

Beispiel

$\{1\}$ *ist ein Erzeugendensystem von* $\mathbb{Z}$.
$\{2, 3\}$ *ist ein Erzeugendensystem von* $\mathbb{Z}$.
$\{1, -1\}$ *ist ein symmetrisches Erzeugendensystem von* $\mathbb{Z}$.

Eine Gruppe heisst endlich erzeugt, wenn sie ein endliches Erzeugendensystem hat.

Beispiel

$\mathbb{Z}$ *ist endlich erzeugt,* $\mathbb{Q}$ *ist nicht endlich erzeugt.*

Definition

Sei G eine Gruppe mit Erzeugendensystem E. Der Cayley-Graph von G (zum Erzeugendensystem E) ist der Graph mit Knotenmenge G, in dem zwei Knoten g_1 und g_2 genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn $g_1^{-1}g_2 \in E$.

Wortmetrik

Wir definieren die Wortmetrik so, dass jede Kante des Cayley-Graphen Länge 1 haben soll. Damit diese Metrik symmetrisch wird, setzen wir Symmetrie des Erzeugendensystems voraus.

Definition

Für eine Gruppe G mit Erzeugendensystem E definieren wir die Wortmetrik auf G durch
$d(g_1, g_2) = \min \left\{ n \colon g_1^{-1} g_2 = s_1 \ldots s_n, s_1 \ldots, s_n \in E \right\}.$

Lemma

Wenn E ein symmetrisches Erzeugendensystem einer Gruppe G ist, dann ist G mit der Wort-Metrik ein metrischer Raum.

Quasi-Isometrien

Definition

Zwei metrische Räume (X_1, d_1) *und* (X_2, d_2) *heissen quasi-isometrisch, wenn es eine Abbildung* $f : X_1 \to X_2$ *und Konstanten* $A \geq 1, B, C \geq 0$ *gibt, so dass*

$$\frac{1}{A} d_1(x,y) - C \leq d_2(f(x), f(y)) \leq A d_1(x,y) + C$$

für alle $x, y \in X_1$ *gilt, und es zu jedem* $z \in X_2$ *ein* $x \in X_1$ *gibt mit*

$$d(f(x), z) \leq B.$$

Beispiel

Die Inklusion $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *ist eine Quasi-Isometrie mit* $A = 1, B = 1, C = 0.$
Die durch $x \to [x]$ *gegebene Abbildung* $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ *ist eine Quasi-Isometrie mit* $A = 1, B = 0, C = 1.$

Lemma

Seien E_1 und E_2 zwei endliche, symmetrische Erzeugendensysteme derselben Gruppe G. Dann sind die zugehörigen Cayley-Graphen mit ihren Wort-Metriken quasi-isometrisch.

Man hat also zu einer endlich erzeugten Gruppe eine bis auf Quasi-Isometrie wohldefinierte Geometrie.

Definition

Die Wirkung einer Gruppe G auf einem topologischen Raum X heisst kokompakt, wenn X/G kompakt ist.

Beispiel

Die Wirkung von G auf seinem Cayley-Graphen ist kokompakt.
Die Wirkung von $\mathbb{Z}^n$ auf $\mathbb{R}^n$ ist kokompakt.

Satz von Švarc-Milnor

Definition

Ein metrischer Raum X heisst geodätisch, wenn sich je zwei Punkte durch einen kürzesten Weg verbinden lassen, und lokal kompakt, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung hat.

Satz

Eine Gruppe G wirke eigentlich diskontinuierlich und kokompakt auf einem geodätischen, lokalkompakten, metrischen Raum X. Dann ist G quasi-isometrisch auf X.

Beispiel

$\mathbb{Z}^n$ ist quasi-isometrisch zum $\mathbb{R}^n$.

Beispiel

Die Fundamentalgruppe einer geschlossenen Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$ ist quasi-isometrisch zur hyperbolischen Ebene.