

Geometrie

Thilo Kuessner

Eichstätt, Sommer 2022

- 1. Bewegungen der Ebene
- 2. Bewegungen des n -dimensionalen Raumes
- 3. Kegelschnitte
- 4. Geometrie von Dreiecken und Kreisen
- 5. Polygone und Polyeder
- 6. Sphärische Geometrie
- 7. Hyperbolische Geometrie
- 8. Projektive Geometrie

Bewegungen der Ebene

Als Verschiebung um einen Vektor $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ bezeichnen wir die Abbildung

$$T_v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + v_x \\ y + v_y \end{pmatrix}$$

Lemma

Eine Verschiebung ist eine Bijektion.

Die Umkehrabbildung von t_v ist t_{-v} .

Drehungen um den Nullpunkt

Die Drehung der Ebene um den Nullpunkt mit Drehwinkel α ist die Abbildung

$$R_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Lemma

Eine Drehung um den Nullpunkt ist eine Bijektion.

Die Umkehrabbildung von R_α ist $R_{-\alpha}$.

Die Drehung der Ebene um den Punkt $p = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit Drehwinkel α ist die Abbildung

$$R_{p,\alpha}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - p_x \\ y - p_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$$

Lemma

$$R_{p,\alpha} = T_p R_\alpha T_{-p}$$

Lemma

Eine Drehung ist eine Bijektion.

Die Umkehrabbildung von $R_{p,\alpha}$ ist $R_{p,-\alpha}$.

Spiegelungen an Parallelen zu Achsen

Die Spiegelung der Ebene an der Geraden $y = c$ ist die Abbildung

$$S_{y=c}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 2c - y \end{pmatrix}$$

Die Spiegelung der Ebene an der Geraden $x = c$ ist die Abbildung

$$S_{x=c}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2c - x \\ y \end{pmatrix}$$

Lemma

Die Spiegelungen $S_{x=c}$ und $S_{y=c}$ sind Bijektionen. Ihre zweimalige Ausführung gibt die Identitätsabbildung.

Die Umkehrabbildung von $S_{x=c}$ ist $S_{x=c}$, die Umkehrabbildung von $S_{y=c}$ ist $S_{y=c}$.

Spiegelungen an Geraden durch Nullpunkt

Die Spiegelung der Ebene an der durch den Nullpunkt mit Neigungswinkel $\frac{\alpha}{2}$ zur x -Achse verlaufenden Geraden ist die Abbildung

$$S_{\alpha}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Lemma

Die Spiegelung S_{α} ist eine Bijektion. Ihre zweimalige Ausführung gibt die Identitätsabbildung. Die Umkehrabbildung von S_{α} ist S_{α} .

Spiegelungen an Geraden

Die Spiegelung der Ebene an der durch den Punkt

$p = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit Neigungswinkel $\frac{\alpha}{2}$ zur x -Achse verlaufenden Geraden ist die Abbildung

$$S_{p,\alpha}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - p_x \\ y - p_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$$

Lemma

$$S_{p,\alpha} = T_p S_\alpha T_{-p}$$

Lemma

Die Spiegelung $S_{p,\alpha}$ ist eine Bijektion. Ihre zweimalige Ausführung gibt die Identitätsabbildung.

Die Umkehrabbildung von $S_{p,\alpha}$ ist $S_{p,\alpha}$.

Lemma

$$R_\alpha \circ R_\beta = R_{\alpha+\beta}$$

Lemma

$$S_\alpha \circ S_\beta = R_{\alpha-\beta}$$

Lemma

$$S_\alpha \circ R_\beta = S_{\alpha-\beta}$$

Lemma

$$R_\alpha \circ S_\beta = S_{\alpha-\beta}$$

Lemma

$$T_v \circ R_\alpha = R_{w,\alpha}$$

mit $w = (E_2 - R_\alpha)^{-1}v$.

Sei $v \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor mit Neigungswinkel α zur x -Achse. Sei $g = \{p + tv : t \in \mathbb{R}\}$ die Gerade durch einen Punkt p mit Neigungswinkel α . Die Verknüpfung

$$T_v \circ S_{p,\alpha} = S_{p,\alpha} \circ T_v$$

heisst Gleitspiegelung mit Gleitspiegelachse g und Verschiebevektor v .

Lemma

Die Gleitspiegelung ist eine Bijektion. Ihre zweimalige Ausführung gibt die Verschiebung um den Vektor $2v$.

Eine orthogonale Matrix ist eine Matrix A mit

$$AA^T = E,$$

wobei E die Einheitsmatrix bezeichnet.

Lemma

Für eine orthogonale Matrix A ist $\det(A) = 1$ oder $\det(A) = -1$.

Satz

Wenn A eine orthogonale 2×2 -Matrix mit $\det(A) = 1$ ist, dann beschreibt die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$v \mapsto Av$$

eine Drehung um den Nullpunkt.

Satz

Wenn A eine orthogonale 2×2 -Matrix mit $\det(A) = -1$ ist, dann beschreibt die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$v \mapsto Av$$

eine Spiegelung an einer Geraden durch den Nullpunkt.

Als Bewegungen der Ebene (Kongruenzabbildungen) bezeichnen wir Verschiebungen, Drehungen, Spiegelungen und Gleitspiegelungen.

Lemma

Jede Abbildung der Form

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$v \mapsto Av + b$$

mit einer orthogonalen 2×2 -Matrix A und einem Vektor $b \in \mathbb{R}^2$ ist eine Bewegung.

Satz

Jede Bewegung der Ebene ist von der Form

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$v \mapsto Av + b$$

mit einer orthogonalen 2×2 -Matrix A und einem Vektor $b \in \mathbb{R}^2$.

Satz

Jede Bewegung der Ebene ist eine Hintereinanderausführung von höchstens drei Geradenspiegelungen.

Bewegungen des n -dimensionalen Raumes

Eine Abbildung

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

heisst linear, wenn

$$f(v + \lambda w) = f(v) + \lambda f(w)$$

für alle $v, w \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt.

Lemma

Zu jeder linearen Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt es eine $n \times n$ -Matrix A mit

$$f(v) = Av$$

für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

Affine Abbildungen

Eine Abbildung

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

heisst affine Abbildung, wenn

$$f(tv + (1 - t)w) = tf(v) + (1 - t)f(w)$$

für alle $v, w, \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ gilt.

Lemma

Zu jeder affinen Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt es eine $n \times n$ -Matrix A und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ mit

$$f(v) = Av + b.$$

für alle $v \in \mathbb{R}^n$. Dabei ist $b = f(0)$.

Eine Bewegung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine affine Abbildung $f(v) = Av + b$ mit einer orthogonalen Matrix A .

Beispiele:

- Verschiebungen $f(v) = v + b$
- Drehungen um Gerade durch den Nullpunkt $f(v) = Av$ mit $A \in SO(n)$
- Spiegelungen an Ebene durch Nullpunkt $f(v) = Av$ mit $A \in O(n) \setminus SO(n)$

Dabei ist $O(n) = \{A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : AA^T = E_n\}$ die Menge der orthogonalen Matrizen und $SO(n) = \{A \in O(n) : \det(A) = 1\}$, also $O(n) \setminus SO(n) = \{A \in O(n) : \det(A) = -1\}$.

Der euklidische Abstand ist im $\mathbb{R}^n$ definiert als

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}.$$

Eine Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine Isometrie, wenn

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Lemma

Jede Bewegung ist eine Isometrie.

Beispiel: Drehungen im dreidimensionalen Raum

Eine Drehung im dreidimensionalen Raum wird durch eine Drehachse v und einen Drehwinkel α festgelegt.

Zum Beispiel ist die Drehung um die x -Achse mit Drehwinkel α die lineare Abbildung $f(v) = Av$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Kegelschnitte

Ein Kegelschnitt ist die Lösungsmenge einer Gleichung

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$$

im $\mathbb{R}^2$ mit gegebenen Konstanten $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c$.

Wir schreiben die Gleichung als

$$(x, y)A(x, y)^T + b^T(x, y)^T + c = 0$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Normalform einer Ellipse

Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mit $a, b > 0$ beschreibt eine Ellipse mit halber Länge a und halber Höhe b .

Normalform einer Hyperbel

Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mit $a, b > 0$ beschreibt eine Hyperbel.

Normalform einer Parabel

Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + y = 0$$

mit $a > 0$ beschreibt eine Parabel.

Normalform eines Geradenkreuzes

Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

mit $a, b > 0$ beschreibt ein Geradenkreuz.

Die Gleichung

$$b_1x + b_2y = 0$$

mit $b_1^2 + b_2^2 > 0$ beschreibt eine Gerade durch den Nullpunkt mit Anstieg $-\frac{b_2}{b_1}$ (bzw. die Y -Achse für $b_1 = 0$).

Normalform paralleler Geraden

Die Gleichung

$$y^2 = 1$$

beschreibt zwei parallele Geraden.

Die Gleichung

$$a^2x^2 + b^2y^2 = 0$$

mit $a^2 + b^2 > 0$ beschreibt den Nullpunkt.

Die Gleichung

$$a^2x^2 + b^2y^2 + 1 = 0$$

beschreibt die leere Menge.

Die Gleichung

$$0 = 0$$

beschreibt die gesamte Ebene.

Hauptachsentransformation

Weil die Matrix A symmetrisch ist, ist sie diagonalisierbar und es gibt eine Orthonormal-Basis $\{v_1, v_2\}$ aus Eigenvektoren von A . Sei S die aus den Eigenvektoren als Spaltenvektoren gebildete orthogonale Matrix und D die aus den Eigenwerten λ_1, λ_2 gebildete Diagonalmatrix, dann ist $A = SDS^T$. Setze

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ dann erhält man eine Gleichung}$$

$$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \epsilon \xi + \delta \eta + \omega = 0,$$

die man durch quadratische Ergänzung und eine Koordinatentransformation $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \xi + \xi_0 \\ \eta + \eta_0 \end{pmatrix}$ sowie Division durch den konstanten Term in Normalform bringen kann.

Geometrie von Dreiecken und Kreisen

- Axiome der Verknüpfung
- Axiome der Anordnung
- Axiome der Kongruenz
- Axiom der Parallelen
- Axiome der Stetigkeit

Folgerungen aus den Axiomen I

- die Kongruenzsätze SSS, SWS, WSW, SSW
- Kongruenz von Strecken und Winkeln sind Äquivalenzrelationen
- Parallelität von Geraden ist Äquivalenzrelation
- in Dreieck liegt größter Winkel gegenüber größter Seite
- durch drei Punkte geht entweder eine eindeutige Gerade oder ein eindeutiger Kreis
- der Nebenwinkelsatz
- der Scheitelwinkelsatz

- die Ähnlichkeitssätze
- der erste Strahlensatz
- die Umkehrung des ersten Strahlensatzes
- der zweite Strahlensatz

Folgerungen aus den Axiomen III

- der Basiswinkelsatz und seine Umkehrung
- der Stufenwinkelsatz und seine Umkehrung
- der Wechselwinkelsatz und seine Umkehrung
- der Innenwinkelsummensatz
- am Dreieck ist Außenwinkel größer als nichtanliegende Innenwinkel
- der Außenwinkelsatz
- der Peripheriewinkelsatz und der Satz über Winkel im Sehnenviereck

Satz

Dreiecke, die

- *in ihren drei Seitenlängen übereinstimmen (SSS)*
- *oder in zwei Seitenlängen und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen (SWS)*
- *oder in einer Seitenlänge und den dieser Seite anliegenden Winkeln übereinstimmen (WSW)*
- *oder in zwei Seitenlängen und dem der längeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen (SSW)*

sind kongruent.

Äquivalenzrelationen

Eine Relation $\sim$ heisst Äquivalenzrelation, wenn gilt

- $a \sim a$ für alle a
- $a \sim b \implies b \sim a$
- $a \sim b, b \sim c \implies a \sim c$

Kongruenz von Strecken ist eine Äquivalenzrelation.

Parallelität von Geraden ist eine Äquivalenzrelation.

Kongruenz von Winkeln ist eine Äquivalenzrelation.

Größenvergleiche und Dreiecksungleichung

Im Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten der größere von zwei Winkeln gegenüber.

Dreiecksungleichung: Die Summe der Längen zweier Seiten ist stets größer als die Länge der dritten Seite eines Dreiecks.

Nebenwinkel und Scheitelwinkel

Schneiden sich zwei Geraden in der Ebene, lassen sich vier Winkel unterscheiden.

Die nebeneinanderliegenden Winkel heißen Nebenwinkel und haben immer eine Summe von 180° .

Die gegenüberliegenden Winkel heißen Scheitelwinkel und sind gleich groß.

In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel (die den gleich langen Seiten gegenüberliegenden Winkel) gleich groß.
Umgekehrt: sind in einem Dreieck zwei Winkel gleich groß, dann sind die gegenüberliegenden Seiten gleich lang.

Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie

- in zwei (und somit in drei Winkeln) übereinstimmen
- oder in allen Verhältnissen entsprechender Seiten übereinstimmen
- oder in einem Winkel und im Verhältnis der anliegenden Seiten übereinstimmen
- oder im Verhältnis zweier Seiten und in dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

Wenn zwei durch einen Punkt Z verlaufende Geraden von zwei Parallelen geschnitten werden, die nicht durch Z gehen, dann gilt

- 1 Es verhalten sich je zwei Abschnitte auf der einen Geraden so zueinander wie die ihnen entsprechenden Abschnitte auf der anderen Geraden:

$$\frac{|ZA|}{|AA'|} = \frac{|ZB|}{|BB'|}, \frac{|ZA|}{|ZA'|} = \frac{|ZB|}{|ZB'|}, \frac{|AA'|}{|ZA'|} = \frac{|BB'|}{|ZB'|}.$$

- 2 Es verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die ihnen entsprechenden, vom Scheitel aus gemessenen Strecken auf jeweils denselben Geraden:

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|ZA|}{|ZA'|}, \frac{|AB|}{|ZA|} = \frac{|A'B'|}{|ZA'|}.$$

Umgekehrt, ist Eigenschaft 1 erfüllt, dann kann man auf parallele Geraden schließen. Aus Eigenschaft 2 kann man im Allgemeinen nicht auf Parallelität der Geraden schließen.

Die Höhen eines Dreiecks stehen senkrecht auf jeder Seite und gehen zum gegenüberliegenden Eckpunkt.

Im Dreieck ABC bezeichnen wir mit H_C den Fußpunkt der Höhe durch C . Dann sind also $AH_C C$ und $BH_C C$ rechtwinklige Dreiecke.

Satz (Kathetensatz)

Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei C und Kantenlängen a, b, c der A, B, C gegenüberliegenden Seiten. Sei H_C der Fusspunkt der Höhe durch C und $q = |BH_C|$. Dann gilt

$$a^2 = qc.$$

Satz (Satz des Pythagoras)

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Hypothenusenquadrat gleich der Summe der Kathetenquadrate:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Satz (Höhensatz)

Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei C und Kantenlängen a, b, c der A, B, C gegenüberliegenden Seiten. Sei H_C der Fusspunkt der Höhe durch C . Dann gilt

$$|AH_C| \cdot |H_CB| = |CH_C|^2.$$

Sätze über Winkel an geschnittenen Parallelen

Satz (Stufenwinkelsatz)

Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind stets gleich groß.

Satz (Wechselwinkelsatz)

Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind stets gleich groß.

Es gelten auch die Umkehrungen: aus Gleichheit der Stufen- oder Wechselwinkel folgt Parallelität der Geraden.

Satz

Die Summe der Innenwinkel in einem beliebigen Dreieck ist 180° .

Korollar (Außenwinkelsatz)

Der Außenwinkel an einer Ecke eines Dreiecks ist gleich der Summe der Innenwinkel an den beiden anderen Ecken.

Korollar

Am Dreieck ist jeder Außenwinkel größer als die nichtanliegenden Innenwinkel.

Ein Peripheriewinkel oder Umfangswinkel ist ein Winkel, dessen Scheitelpunkt ein Punkt auf der Peripherie des Kreises ist und dessen Schenkel Sehnen des Kreises sind.

Ein Mittelpunktswinkel ist ein Winkel, dessen Scheitel im Mittelpunkt des Kreises liegt und dessen Schenkel den Kreis schneiden.

Ein Sehnentangentenwinkel wird begrenzt von einer Sehne und einer Kreistangente.

Satz (Peripheriewinkelsatz)

Alle Peripheriewinkel über einem Kreisbogen sind gleich groß.

Satz (Sehnentangentenwinkelsatz)

Die beiden Sehnentangentenwinkel eines Kreisbogens sind so groß wie die Peripheriewinkel des Kreisbogens.

Satz (Kreiswinkelsatz)

Der Mittelpunktswinkel eines Kreisbogens ist halb so groß wie die Peripheriewinkel des Kreisbogens.

Satz des Thales und Umkehrung

Korollar (Satz des Thales)

Liegt der Punkt C eines Dreiecks ABC auf einem Halbkreis über der Strecke $\overline{AB}$, dann hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel.

Korollar

Hat das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel, so liegt C auf einem Kreis mit $\overline{AB}$ als Durchmesser.

Satz (Satz über Innenwinkel im Sehnenviereck)

In einem Sehnenviereck ist die Summe der Größen gegenüberliegender Innenwinkel stets 180° .

Satz (Sehnensatz)

Die beiden Diagonalen eines Sehnenvierecks teilen das Sehnenviereck in vier Teildreiecke. Es gilt: Je zwei gegenüberliegende Dreiecke sind zueinander ähnlich.

Satz (Satz des Ptolemäus)

In einem konvexen Sehnenviereck ist die Summe der Produkte gegenüberliegender Seitenlängen gleich dem Produkt der Diagonallängen:

$$ef = ac + bd.$$

Für drei auf einer Gerade liegende unterschiedliche Punkte U, V, W bezeichnen wir mit $TV(U, V, W)$ das (orientierte, also eventuell negative) Teilverhältnis, was definiert wird durch

$$\overrightarrow{UW} = TV(U, V, W) \cdot \overrightarrow{WV}.$$

Wenn W zwischen U und V liegt, ist

$$TV(U, V, W) = \frac{|UW|}{|WV|},$$

andernfalls ist

$$TV(U, V, W) = -\frac{|UW|}{|WV|}.$$

Satz (Satz von Menelaos)

Gegeben sei ein Dreieck ABC und eine Gerade, die die drei Dreiecksseiten BC , CA , AB oder ihre Verlängerungen in den Punkten X , Y , Z schneidet. Dann gilt

$$TV(B, C, X) \cdot TV(C, A, Y) \cdot (A, B, Z) = -1.$$

Umgekehrt liegen drei Punkte $X \in BC$, $Y \in CA$, $Z \in AB$ auf einer Geraden, wenn diese Gleichung gilt.

Satz (Satz von Ceva)

In einem Dreieck ABC seien AD , BE und CF die drei Ecktransversalen, also Verbindungsstrecken zwischen einer Ecke und einem Punkt auf der gegenüberliegenden Seite oder deren Verlängerung.

Wenn die drei Ecktransversalen sich in einem Punkt schneiden, dann gilt

$$TV(A, B, F) \cdot TV(B, C, D) \cdot TV(C, A, E) = 1.$$

Als Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$ bezeichnen wir die eindeutig bestimmte Gerade, die senkrecht auf der Geraden AB steht und durch den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ verläuft.

Lemma

Wenn für einen Punkt C gilt

$$|AC| = |CB|,$$

dann liegt C auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$.

Umgekehrt, wenn C auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ liegt, dann ist $|AC| = |CB|$.

Satz

Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Dieser ist Mittelpunkt des eindeutig bestimmten Kreises, der durch die drei Eckpunkte des Dreiecks geht (des Umkreises).

Die Winkelhalbierende eines Winkels $\angle AOB$ ist die Halbgerade, die durch den Scheitelpunkt O des Winkels läuft und das Winkelfeld in zwei deckungsgleiche Teile teilt.

Sie besteht also aus denjenigen Punkten C , für die

$$\angle AOC = \angle COB$$

ist.

Lemma

Die Winkelhalbierende besteht aus denjenigen Punkten C , die von der Geraden OA denselben Abstand wie von der Geraden OB haben.

Satz

Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Dieser ist Mittelpunkt des eindeutig bestimmten Kreises, der jede Dreiecksseite berührt (des Inkreises).

Satz

Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Die komplexe Zahlenebene

Wir notieren die Vektoren $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ der 2-dimensionalen Ebene als

$$z = x + yi.$$

Die Vektoraddition entspricht dann der Rechenregel

$$(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$$

Wir bezeichnen Ausdrücke der Form $z = x + yi$ als komplexe Zahlen, x als ihren Realteil und y als ihren Imaginärteil.

Wir definieren

$$i^2 = -1$$

und dementsprechend

$$(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i.$$

Weiter definieren wir für $z = x + iy$ die komplexe Konjugation durch $\bar{z} = x - iy$ und den Betrag durch $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Es ist $z\bar{z} = x^2 + y^2$, also ist $|z|$ die Länge des Vektors (x, y) .

Polarkoordinaten

Für einen Vektor (x, y) sei

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

der Abstand vom Nullpunkt und ϕ der Winkel mit der x -Achse, also

$$x = r \cos \phi, y = r \sin \phi.$$

Dann ist

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi).$$

Die Multiplikation $z_1 z_2$ läßt sich berechnen durch

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)).$$

Insbesondere ist

$$z^n = r^n (\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)).$$

Die Verschiebung um den Vektor (a, b) läßt sich mit $c := a + bi$ schreiben als

$$z \mapsto z + c.$$

Die Drehung um den Nullpunkt mit Drehwinkel α läßt sich schreiben als

$$z \mapsto (\cos \alpha + i \sin \alpha)z.$$

Die Streckung um den Faktor λ mit Streckzentrum im Nullpunkt läßt sich schreiben

$$z \mapsto \lambda z.$$

Die Spiegelung an der x -Achse läßt sich schreiben als

$$z \mapsto \bar{z}.$$

Die Abbildung

$$z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$$

wird als Spiegelung am Einheitskreis bezeichnet.

Polygone und Polyeder

Ein n -Eck oder Polygon mit n Ecken $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^2$ ist die ebene Figur, die durch den geschlossenen Streckenzug aus den Strecken $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}, \overline{P_nP_1}$ berandet wird.

Lemma

Ein konvexes Polygon mit n Ecken hat die Innenwinkelsumme $\pi(n - 2)$.

Ein n -Eck heisst regelmäßig, wenn alle Seiten $\overline{P_i P_{i+1}}$ gleich lang und alle Innenwinkel gleich groß sind.

Lemma

Für eine gegebene Länge l sind alle regelmäßigen n -Ecke mit $\overline{P_1 P_2} = l$ kongruent zueinander.

Ein Polyeder ist der Durchschnitt

$$P = H_1 \cap \dots \cap H_k$$

endlich vieler Halbräume, wobei jeder Halbraum H_i durch eine lineare Ungleichung $Ax \leq b$ gegeben ist, also

$$H_i = \{x \in \mathbb{R}^3 : A_i x \leq b_i\}$$

mit 3×3 -Matrizen A_i und Vektoren $b_i \in \mathbb{R}^3$. (Die Ungleichung $A_i x \leq b_i$ ist komponentenweise zu verstehen.)

Satz

Für jedes konvexe Polyeder mit f Flächen, k Kanten und e Ecken gilt

$$e - k + f = 2.$$

Die Eulersche Polyederformel gilt im Allgemeinen nicht für nichtkonvexe Polyeder. Wenn ein Polyeder eine Fläche mit g "Löchern" ist, dann gilt

$$e - k + f = 2 - 2g.$$

Die regelmäßigen Polyeder sind die sogenannten platonischen Körper: Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Iosaeder.

Sphärische Geometrie

Punkte:

$$P = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

"Geraden" (=Großkreise):

$$G = \{E \cap S^2 : E \subset \mathbb{R}^3 \text{ ist eine Ebene durch den Ursprung}\}$$

Geraden durch zwei Punkte

Zwei Punkte A und B heissen antipodal, wenn $A = -B$. Durch zwei antipodale Punkte gibt es unendlich viele Großkreise. (Dies ist ein Unterschied zur euklidischen Geometrie, wo es durch zwei unterschiedliche Punkte eine eindeutige Gerade gibt.)

Lemma

Wenn A und B unterschiedliche Punkte und nicht antipodal sind, dann gibt es genau einen Großkreis, der A und B enthält.

$$d_S(p, q) := \arccos(\langle p, q \rangle) \in [0, \pi]$$

Dies entspricht dem Winkel $\angle p0q$.

Lemma

- $d_S(p, q) > 0$ für $p \neq q$
- $d_S(p, q) = d_S(q, p)$
- Für d_S gilt die Dreiecksungleichung
 $d_S(p, q) + d_S(q, r) \geq d_S(p, r)$ mit Gleichheit nur, wenn p, q, r auf einem Großkreis liegen.

Parametrisierung von Großkreisen

Sei $K = E \cap S^2$ ein Großkreis und $p \in K$. Die Vektoren $X \in E$ mit

$$\langle X, p \rangle = 0$$

werden als Tangentialvektoren an p bezeichnet.

Mit einem Tangentialvektor X können wir K parametrisieren als

$$K = \{\cos(t)p + \sin(t)X : t \in \mathbb{R}\}.$$

Sei jetzt X ein Tangentialvektor mit $\|X\| = 1$. Dann ist

$$d_S(p, \cos(t)p + \sin(t)X) = t.$$

Für Großkreisbögen $K_1 = \{\cos(t)p + \sin(t)X : t > 0\}$ und $K_2 = \{\cos(t)p + \sin(t)Y : t > 0\}$ ist der Winkel zwischen ihnen definiert als $\arccos\langle X, Y \rangle$.

Lemma

Seien $A, B, C \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ und sei $\alpha = \angle BAC$ der Innenwinkel des sphärischen Dreeicks ABC bei A .

Dann ist

$$\alpha = \angle(A \times B, A \times C),$$

wobei das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$ berechnet wird.

Satz

Sei ABC ein sphärisches Dreieck. Dann gilt

- *Seitenkosinussatz: $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$*
- *Winkelkosinussatz: $\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$*
- *Sinussatz $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$*
- *Innenwinkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$*

Satz

Für orthogonale Matrizen $A \in O(3)$ gilt

- $p \in S^2 \implies Ap \in S^2$
- $p, q \in S^2 \implies d_S(Ap, Aq) = d_S(p, q).$

Hyperbolische Geometrie

Die Punkte der hyperbolischen Ebene sind die Punkte der oberen Halbebene

$$H^2 = \{(x, y) : y > 0\} = \{z = x + yi \in \mathbb{C} : y > 0\}.$$

Die Geraden sind diejenigen Geraden oder Halbkreise, die auf der x -Achse senkrecht stehen.

Lemma

Durch je zwei unterschiedliche Punkte der hyperbolischen Ebene gibt es eine eindeutige hyperbolische Gerade.

Die hyperbolische Länge einer Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow H^2$ ist definiert als

$$l(\gamma) := \int_a^b \frac{1}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} |\gamma'(t)| dt.$$

Dabei ist $\operatorname{Im}(z) = y$ der Imaginärteil von $z = x + yi$.

Anschaulich wird also die Länge einer Kurve umso kleiner, je größer ihre Entfernung von der x -Achse ist.

Die kürzesten Verbindungskurven zweier Punkte sind dann die hyperbolischen Geraden, also die auf der x -Achse senkrecht stehenden Geraden und Halbkreise.

Der Abstand $d_{hyp}(z, w)$ zwischen zwei Punkten z, w (die hyperbolische Metrik) wird definiert als Länge dieser kürzesten Verbindungskurve.

Bewegungen der hyperbolischen Ebene

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine Matrix mit Determinante $ad - bc = 1$.

Wir definieren eine Abbildung $f: H^2 \rightarrow H^2$ durch

$$f(z) := \frac{az + b}{cz + d}.$$

Diese Abbildungen sind Isometrien der hyperbolischen Metrik: für alle Punkte $z, w \in H^2$ gilt

$$d_{hyp}(f(z), f(w)) = d_{hyp}(z, w).$$

Wenn $|a + c| < 2$ ist, dann heißt die Bewegung f eine elliptische Isometrie.

Ein Beispiel ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Diese bildet $0 + 1i$ auf sich ab und bildet Kreise um diesen Punkt auf Kreise um diesen Punkt ab, ist aber keine euklidische Drehung.

Wenn $|a + c| = 2$ ist, dann heißt die Bewegung f eine parabolische Isometrie.

Ein Beispiel ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese entspricht der Verschiebung $f(z) = z + t$.

Wenn $|a + c| > 2$ ist, dann heißt die Bewegung f eine hyperbolische Isometrie.

Ein Beispiel ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Diese entspricht der Abbildung $f(z) = \lambda^2 z$.

Die Abbildung

$$f(z) = \frac{-iz + 1}{z - i}$$

bildet die Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ auf die Halbebene $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im}(z) > 0\}$ ab und ist eine Bijektion. Die hyperbolische Länge einer Bildkurve in der Halbebene kann für die ursprüngliche Kurve in der Kreisscheibe berechnet werden als

$\int_a^b \frac{2}{1-|\gamma(t)|^2} |\gamma'(t)| dt$. Die Abstände werden also umso größer je näher man dem Rand der Kreisscheibe kommt.

Die Bilder von M. C. Escher zeigen die Symmetrien der hyperbolischen Metrik in diesem Kreisscheibenmodell.

Projektive Geometrie

Lehrsätze zur Geometrie der euklidischen Ebene müssen in ihren Formulierungen zwischen parallelen und sich schneidenden Geraden unterscheiden. Die Konstruktion der projektiven Ebene soll die affine Ebene $\mathbb{R}^2$ so erweitern, dass diese Unterscheidung nicht mehr notwendig sein wird, weil alle Geraden sich schneiden. Dafür nimmt man "Punkte im Unendlichen" als Schnittpunkte paralleler Geraden hinzu, je einen "Punkt im Unendlichen" für jede Richtung, d.h. jede Menge paralleler Geraden.

Man realisiert das wie folgt. Die affine Ebene $\mathbb{R}^2$ wird mittels

$$(x, y) \mapsto (x, y, 1)$$

in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet. Durch jeden Punkt $(x, y, 1)$ gibt es eine eindeutige Ursprungsgerade (d.h. Gerade durch $(0, 0, 0)$).

Außerdem gibt es Ursprungsgeraden, die in der Ebene $z = 0$ liegen und die also die eingebettete affine Ebene nicht schneiden.

Es entspricht also jede Ursprungsgerade im $\mathbb{R}^3$ entweder einem Punkt in der affinen Ebene $\mathbb{R}^2$ oder einer Ursprungsgerade (und damit einer Menge paralleler Geraden) im $\mathbb{R}^2$.

Wir definieren deshalb die Punkte der projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$ als die Ursprungsgeraden im $\mathbb{R}^3$. Die projektive Ebene ist also die Vereinigung der affinen Ebene $\mathbb{R}^2$ mit den Punkten im Unendlichen.

Die Geraden der projektiven Ebene sind die Ursprungsebenen des $\mathbb{R}^3$. Je zwei unterschiedliche Geraden der projektiven Ebene schneiden sich in einem eindeutigen Punkt. Durch zwei unterschiedliche Punkte der projektiven Ebene gibt es eine eindeutige Gerade.