

Algebra und Zahlentheorie, SS 2009, Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1:

Aus einem indischen Mathe-Buch des 7. Jahrhunderts:

Eine Frau trägt einen Korb mit Eiern. Als ein Pferd an ihr vorbeigaloppiert, erschrickt sie, läßt den Korb fallen und alle Eier zerbrechen. Als sie gefragt wird, wieviele Eier in dem Korb gewesen seien, gibt sie zur Antwort, sie erinnere sich nur, dass beim Zählen in Gruppen zu zweien, dreien, vieren und fünfen jeweils die Reste 1, 2, 3 und 4 geblieben seien. Wieviele Eier waren in dem Korb?

(Sie können voraussetzen, dass es weniger als 100 Eier waren.)

Aufgabe 2:

Für welche $x \in \mathbb{N}$ ist

- $x^2 + x + 1$ durch 3 teilbar?
- $x^2 + x + 1$ durch 9 teilbar?

Aufgabe 3:

Sei x eine ungerade natürliche Zahl. Beweisen Sie:

$$\text{ggT}(x + 1, x^2 + 1) = 2.$$

Aufgabe 4:

- Beweisen Sie: für jede Quadratzahl n ist $n \equiv 0 \pmod{4}$ oder $n \equiv 1 \pmod{4}$.
- Beweisen Sie: wenn eine Primzahl p Summe zweier Quadratzahlen ist, dann ist entweder $p = 2$ oder $p \equiv 1 \pmod{4}$.
- Geben Sie mindestens 5 Primzahlen an, die Summe zweier Quadratzahlen sind.

Abgabe 16. Juni 2009, 12:15 Uhr.