Übungen zur Topologie

Blatt 9

Aufgabe 1. Sei $\mathbb{N}_g$ die geschlossene nicht-orientierbare Fläche vom Geschlecht $g \geq 1$.
(a) Bestimmen sie die Fundamentalgruppe von $\mathbb{N}_g$, d.h., geben Sie Erzeuger und Relationen an.
(b) Beweisen Sie: $\pi_1^{ab}(\mathbb{N}_2) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2. Seien X, Y zusammenhängende n-dimensionale Mannigfaltigkeiten, $f : \mathbb{B}^n \to A \subset X$ und $g : \mathbb{B}^n \to B \subset Y$ Homöomorphismen der abgeschlossenen Einheitskugel $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ auf abgeschlossene Teilmengen $A \subset X, B \subset Y$. Auf $T := (X - int(A)) + (Y - int(B))$ betrachte man die Äquivalenzrelation, die durch $f(t) \sim g(t)$ für $t \in \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{B}^n$ erzeugt wird. Den Quotienten $X \sharp Y := T/\sim$ nennt man die **zusammenhängende Summe** von X und Y.
(a) Zeigen Sie für $n \geq 3$: $\pi_1(X \sharp Y) \simeq \pi_1(X) * \pi_1(Y)$.
(b) Geben Sie eine Formel für $\pi_1(X \sharp Y)$ im Fall $n = 2$ an.

Aufgabe 3.
(a) Zeigen Sie, dass $\Phi : \mathbb{C}^* \times \left(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}\right) \to \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}, (\lambda, z) \to \lambda z$
eine Operation von $\mathbb{C}^*$ auf $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ definiert.
Zeigen Sie, dass $\Psi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{S}^{2n+1}, (\lambda, z) \to \lambda z$
eine Operation von $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^*$ auf $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ definiert.
(b) Zeigen Sie, dass die Bahnenräume $\left(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}\right)/\mathbb{C}^*$ und $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ homöomorph sind. (Diese Bahnenräume heissen **komplex n-dimensionale projektive Räume** $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.)
(c) Zeigen Sie: $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ist homöomorph zu $\mathbb{S}^2$.

Aufgabe 4. Eine topologische Gruppe G operiere auf den Räumen X und Y. Dann heisst eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ **äquivariant**, wenn $f(g.x) = g.f(x)$ für alle $g \in G, x \in X$ ist.
(a) Sei $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Zeigen Sie, dass $H \times G \to G, (h, g) \to gh^{-1}$ eine Operation von H auf G definiert. Zeigen Sie, dass auf dem Quotienten G/H eine Wirkung von G durch $G \times G/H \to G/H, (g, g'H) \to gg'H$ definiert ist. (Man nennt $Y := G/H$ zusammen mit dieser G-Wirkung einen **homogenen Raum**.)
(b) $G = SO(n+1)$ operiert auf $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ durch Matrixmultiplikation. Beweisen Sie, dass diese Operation transitiv ist. Geben Sie einen G-äquivarianten Homöomorphismus $\Phi : SO(n+1)/SO(n) \to \mathbb{S}^n$ an. (Hierbei ist $SO(n)$ auf geeignete Weise als Untergruppe von $SO(n+1)$ aufzufassen, z.B. als die Untergruppe derjenigen $(n+1) \times (n+1)$-Matrizen in $SO(n+1)$, deren erste Zeile $(1, 0, 0, \ldots, 0, 0)$ ist.)

Abgabe: Mittwoch, 19. Juni, 9.15 Uhr.