Übungen zur Topologie

Blatt 8

Aufgabe 1. Seien G_1 und G_2 abelsche Gruppen.
(a) Bestimmen Sie das Produkt $G_1 \times G_2$ und die Summe $G_1 \oplus G_2$ in der Kategorie der abelschen Gruppen.
(b) Zeigen Sie, dass das abelsch gemachte freie Produkt von G_1 und G_2 die Summe von G_1 und G_2 in der Kategorie der abelschen Gruppen ist: $(G_1 * G_2)^{ab} \simeq G_1 \oplus G_2$.

Aufgabe 2. Seien X und Y wegzusammenhängende Räume.
(a) Für einen Weg γ in Y von y_1 nach y_2 bezeichne $\Phi_\gamma : \pi_1(Y, y_1) \to \pi_1(Y, y_2)$ den von γ induzierten Isomorphismus. Zeigen Sie: Sind $f, g : X \to Y$ homotop, $x \in X$, so existiert ein Weg γ in Y von $f(x)$ nach $g(x)$, so dass gilt: $\Phi_\gamma f_* = g_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, g(x))$.
(b) Zeigen Sie: Sind X und Y homotopieäquivalent, so sind ihre Fundamentalgruppen isomorph.

Aufgabe 3. Für $g \geq 2$ sei $\mathbb{E}_{2g} \subseteq \mathbb{R}^2$ das reguläre $2g$-Eck mit Ecken $w_0, \ldots, w_{2g-1}$. Wir erzeugen eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{E}_{2g}$, indem wir auf dem Rand von $\mathbb{E}_{2g}$ verlangen:

$$(1-t)w_{2j} + tw_{2j+1} \sim (1-t)w_{2j+1} + tw_{2j+2} \qquad (j = 0, \ldots, g-1), t \in [0,1]$$

Man nennt $\mathbb{N}_g := \mathbb{E}_{2g}/\!\sim$ die geschlossene, nicht-orientierbare Fläche vom Geschlecht g (und setzt: $\mathbb{N}_1 := \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$).
(a) Zeigen Sie: $\mathbb{N}_g - \{p\} \simeq \mathbb{S}^1 \vee \ldots \vee \mathbb{S}^1$ (g mal).
(b) Entfernt man aus $\mathbb{S}^2$ g Kreisscheiben und setzt dort g Möbiusbänder ein, so ist die entstandene Fläche homöomorph zu $\mathbb{N}_g$.

Aufgabe 4. (a) Sei (Z, z_0) ein punktierter topologischer Raum und SZ seine reduzierte Einhängung (Aufgabe 3, Blatt 7). Zeigen Sie, dass SZ vermöge $\nu : SZ \to SZ \vee SZ$,

$$\nu([z,t]) := \begin{matrix} ([z, 2t], z_0) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (z_0, [z, 2t-1]) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{matrix}$$

zu einer H-Kogruppe (Aufgabe 4, Blatt 7) wird.
(b) Vermöge Aufgabe 3, Blatt 7, ist nun für $k \geq 1$ $S^k = S\left(S^{k-1}\right)$ und mit Teil (a) und Aufgabe 4, Blatt7, wird für einenpunktierten topologischen Raum (X, p) die Menge $\pi_k(X, p) := \left[\left(S^k, [z_0, t]\right), (X, p)\right]$ zu einer Gruppe. Sie heißt die **k-te Homotopiegruppe** von (X, p). Definieren Sie nun für jeden Morphismus $f : (X, p) \to (Y, q)$ in $\underline{H - Top}_0$ einen Homomorphismus $f_* : \pi_k(X, p) \to \pi_k(Y, q)$ derart, dass $\pi_k : \underline{H - Top}_0 \to \underline{Grp}$ zu einem Funktor wird.

Abgabe: Mittwoch, 12. Juni, 9.15 Uhr.