Übungen zur Topologie

Blatt 6

Aufgabe 1.(a) Zeigen Sie, dass die dreifach punktierte Sphäre den Homotopietyp der Acht hat, $\mathbb{S}^2 - \{p_1, p_2, p_3\} \simeq \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$.
(b) Zeigen Sie, dass der zweifach punktierte Torus den Homotopietyp eines dreifach gebundenden Buketts von Kreislinien hat, $\mathbb{T}^2 - \{p_1, p_2\} \simeq \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$.

Aufgabe 2. (a) Sei $\mathbb{B}_g^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ eine g-fach gelochte Kreisscheibe,
$\mathbb{B}_g^2 = \mathbb{B}^2 \setminus \{\mathbb{B}_1^2(p_1, \epsilon_1), \ldots, \mathbb{B}_g^2(p_g, \epsilon_g)\}$, wobei $\epsilon_i > 0$, $\mathbb{B}_i \subset \mathbb{B}_g^2$, $\mathbb{B}_i \cap \mathbb{B}_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Wir nennen $V_g := \mathbb{B}_g^2 \times [0,1]$ den Henkelkörper (oder die Vollbrezel) vom Geschlecht $g \in \mathbb{N}$. Begründen Sie (z.B. durch eine Zeichnung), warum der Rand von V_g homöomorph zu der geschlossenen, orientierten Fläche $\mathbb{F}_g$ vom Geschlecht g ist.
(b) Zeigen Sie: $V_g \simeq \mathbb{S}^1 \vee \ldots \vee \mathbb{S}^1$ ($2g$ mal).

Aufgabe 3. Für $g \geq 2$ sei $\mathbb{E}_{2g} \subseteq \mathbb{R}^2$ das reguläre $2g$-Eck mit Ecken $w_0, \ldots, w_{2g-1}$. Wir erzeugen eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{E}_{2g}$, indem wir auf dem Rand von $\mathbb{E}_{2g}$ verlangen:

$$(1-t)w_{2j} + tw_{2j+1} \sim (1-t)w_{2j+1} + tw_{2j+2} \quad (j = 0, \ldots, g-1), t \in [0,1]$$

Man nennt $\mathbb{N}_g := \mathbb{E}_{2g}/\!\sim$ die geschlossene, nicht-orientierbare Fläche vom Geschlecht g (und setzt: $\mathbb{N}_1 := \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$).
(a) Zeigen Sie: $\mathbb{N}_g \setminus \{p\} \simeq \mathbb{S}^1 \vee \ldots \vee \mathbb{S}^1$ (g mal).
(b) Entfernt man aus $\mathbb{S}^2$ g Kreisscheiben und setzt dort g Möbiusbänder ein, so ist die entstandene Fläche homöomorph zu $\mathbb{N}_g$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die orthogonale Gruppe $O(n;\mathbb{R})$ ein (Deformations-) Retrakt der linearen Gruppe $GL(n;\mathbb{R})$ (für jedes $n \in \mathbb{N}$) ist. (Hinweis: Gram-Schmidt Verfahren in Abhängigkeit der Eingaben.)

Abgabe: Mittwoch, 29.Mai, 9.15 Uhr.