Math. Institut der Univ. München, F. Loose, T. Kuessner 3. Juli 2002

Übungen zur Topologie, Blatt 12

Aufgabe 1.

Skizzieren Sie die universelle Überlagerung von $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$!

Aufgabe 2.

Sei $\mathbb{S}^3 = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 = 1\right\}$ und $\xi := e^{\frac{2\pi i}{p}} \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ sei eine p-te Einheitswurzel. Für $q \in \mathbb{Z}$ definieren wir eine Wirkung von $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{S}^3$ durch

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$$
$$(k, (z_1, z_2)) \longrightarrow \left(\xi^k z_1, \xi^{kq} z_2\right).$$

a) Zeigen Sie: wenn p und q teilerfremd sind, so wirkt $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ frei und eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{S}^3$.
b) Sei $V_1 = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 : \mid z_1 \mid \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}, V_2 = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 : \mid z_1 \mid \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. Seien p und q teilerfremd. Zeigen Sie, dass $V_1/_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$ und $V_2/_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$ Volltori sind, aber dass $L(p,q) := \mathbb{S}^3/_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$ für $p \neq 0$ nicht homöomorph zu $\mathbb{S}^3$ ist.
Hinweis: Sei $\overline{q}q \equiv 1 \bmod p$. Betrachten Sie $h : V_1/_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \to V_1$ gegeben durch $h\left(r_1 e^{i\phi_1}, r_2 e^{i\phi_2}\right) := \left(r_1 e^{i\phi_1} r_2 e^{-i\overline{q}\phi_2}, r_2 e^{ip\phi_2}\right)$.

Aufgabe 3.

Analogon des Hauptsatzes der Galoistheorie: Sei $p : \left(\tilde{X}, \tilde{x}_0\right) \to (X, x_0)$ eine *reguläre* Überlagerung.
$p' : \left(\tilde{X}', \tilde{x}_0'\right) \to (X, x_0)$ heisst Teilüberlagerung, falls es einen Morphismus $f : \left(\tilde{X}, \tilde{x}_0\right) \to \left(\tilde{X}', \tilde{x}_0'\right)$ gibt.
Beweisen Sie: es gibt eine Bijektion zwischen der Menge der Teilüberlagerungen von p und der Menge der Untergruppen von $Deck\left(\tilde{X}, X\right)$, wobei die regulären Teilüberlagerungen den Normalteilern von $Deck\left(\tilde{X}, X\right)$ entsprechen.
Hinweis: Zeigen Sie, dass f eine reguläre Überlagerung ist.

Aufgabe 4.

Schreiben Sie die Kleinsche Flasche $\mathbb{N}_2$ als $\mathbb{R}^2/\Gamma$ für eine Gruppe Γ, die eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{R}^2$ operiert. Hinweis: Γ ist z.B. erzeugt von einer Translation und einer "Gleitspiegelung".