Math. Institut der Univ. München, F. Loose, T. Kuessner 19. Juni 2002

Übungen zur Topologie

Blatt 10

Aufgabe 1.
Sei G eine topologische Gruppe und G_0 die "Zusammenhangskomponente der Eins", d.h., die größte zusammenhängende Teilmenge von G, die das neutrale Element enthält. Zeigen Sie:
a) G_0 ist ein Normalteiler.
b) Für jede Umgebung $U \subset G_0$ des neutralen Elements gilt: $G_0 = \bigcup_{n \geq 1} U^n$.

Aufgabe 2.
a) **Graßmann-Mannigfaltigkeiten**: Konstruieren Sie eine Bijektion zwischen der Menge aller k-dimensionalen Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$ und $O(n) / (O(k) \times O(n-k))$.
b) **Stiefel-Mannigfaltigkeiten**: Konstruieren Sie eine Bijektion zwischen der Menge aller ON-k-Repers des $\mathbb{R}^n$ und $O(n) / O(n-k)$.
(Ein geordnetes k-Tupel $(v_1, \ldots, v_k) \in (\mathbb{R}^n)^k$ heißt ein ON-Reper falls $< v_i, v_j >= \delta_{ij}$ für alle $1 \leq i, j \leq k$ gilt.)

Aufgabe 3.
Wir identifizieren durch $(x_1, x_2, x_3, x_4) \to (x_1 + ix_2, x_3 + ix_4)$ den $\mathbb{R}^4$ mit dem $\mathbb{C}^2$. Die 3-Sphäre ist dann $\mathbb{S}^3 = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 = 1\right\}$. Es sei $SU(2)$ die Gruppe der unitären 2x2-Matrizen über $\mathbb{C}$ mit Determinante 1. Zeigen Sie:
Die Abbildung $(z_1, z_2) \to \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix}$ definiert einen Homöomorphismus $h : \mathbb{S}^3 \to SU(2)$.
(Also wird $\mathbb{S}^3$ vermöge $(z_1, z_2) \,.\, (z_1', z_2') = (z_1 z_1' - z_2 \overline{z}_2', z_1 z_2' + z_2 \overline{z}_1')$ zu einer topologischen Gruppe.)

Aufgabe 4.
Sei $V_1 = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 : \mid z_1 \mid \leq \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}$ und $V_2 = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 : \mid z_1 \mid \geq \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}$. Zeigen Sie:
a) V_1 und V_2 sind Volltori, d.h. homöomorph zu $\mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1$. $V_1 \cap V_2$ ist ein Torus (homöomorph zu $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$) und $V_1 \cup V_2 = \mathbb{S}^3$.
b) Rechtsmultiplikation mit $(0, 1)$ (im Sinne von Aufgabe 3) bildet V_1 homöomorph auf V_2 und V_2 homöomorph auf V_1 ab.

Abgabe: Mittwoch, 26. Juni, 9.15 Uhr.