Aufgabe 1
Sei $\| \, . \, \|$ die durch $\| (x_1, x_2, x_3) \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ gegebene Norm auf dem $\mathbf{R}^3$.
Für $x, y \in \mathbf{R}^3$ definieren wir

$$d(x,y) = \frac{\| x - y \|}{1 + \| x - y \|}.$$

a) Beweisen Sie, dass $X := \left(\mathbf{R}^3, d\right)$ ein metrischer Raum ist.
b) Beweisen Sie, dass X beschränkt ist.
c) Hat die Folge $a_n = (n, n, n)$ eine in X konvergente Teilfolge? Ist X kompakt?

Aufgabe 2
Geben Sie eine Parametrisierung der durch

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x = y^4 + 2y^2 z^2 + z^4, y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\right\}$$

gegebenen Kurve an und berechnen Sie ihre Bogenlänge.

Aufgabe 3
a) Sei $s > 0$. Man bestimme das Maximum der Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 (s - x_1 - x_2)$$

auf $\left\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\right\}$.
b) Man folgere daraus für $x_1, x_2, x_3 > 0$ die Ungleichung

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq (x_1 x_2 x_3)^{\frac{1}{3}}.$$

Aufgabe 4
Sei $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R^3}$ eine Abbildung, so dass $f(0) = 0$ und

$$\| f(v) - 3v \| \leq 37 \| v \|^2 \quad \forall \, v \in \mathbf{R}^3$$

Beweisen Sie, dass f in 0 differenzierbar ist. Berechnen Sie $Df(0)$.