Aufgabe 1.1: R F F F F
Aufgabe 1.2: R R R F
Aufgabe 1.3: F F F R
Aufgabe 1.4: K K D K

Aufgabe 2.1

1.
Fall 1: $0 \leq x$:

Es ist $sin\,(0) = 0$ und $sin'\,(\xi) = cos\,(\xi) \leq 1$ für alle ξ. Nach dem Mittelwertsatz ist

$$\frac{sin\,(x)}{x} = \frac{sin\,(x) - 0}{x - 0} = sin'\,(\xi) = cos\,(\xi) \leq 1$$

für ein $\xi \in (0, x)$, für $x > 0$ folgt $sin\,(x) \leq x$.
Für $0 \leq x$ ist $\mid x \mid = x, \mid sin\,(x) \mid = sin\,(x)$, deshalb folgt $\mid sin\,(x) \mid \leq \mid x \mid$.

Fall 2: $x < 0$.

Dann ist $0 < -x$, also $sin\,(-x) < -x$ nach Fall 1. Es folgt

$$\mid sin\,(x) \mid = -sin\,(x) = sin\,(-x) < -x = \mid x \mid .$$

2. $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ ist stetig und deshalb nach dem Satz von Weierstraß beschränkt. Es gibt also ein $C > 0$ mit $\mid f\,(x) \mid \leq C$ für alle $x \in [0, 1]$. Insbesondere ist $\mid f\left(\frac{1}{k}\right) \mid \leq C$ für alle $k > 0$.

Weiterhin ist $\mid sin\left(\frac{1}{3^k}\right) \mid \leq \frac{1}{3^k}$ nach Teil 1. Damit erhalten wir

$$\mid 2^k f\left(\frac{1}{k}\right) sin\left(\frac{1}{3^k}\right) \mid^{\frac{1}{k}} \leq \left(2^k C \frac{1}{3^k}\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{2}{3} C^{\frac{1}{k}}.$$

Wegen $C > 0$ ist $\lim_{k\to\infty} C^{\frac{1}{k}} = 1$, also

$$\lim_{k\to\infty} \mid 2^k f\left(\frac{1}{k}\right) sin\left(\frac{1}{3^k}\right) \mid^{\frac{1}{k}} = \frac{2}{3}.$$

Aus dem Wurzelkriterium folgt die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k f\left(\frac{1}{k}\right) sin\left(\frac{1}{3^k}\right).$$

Aufgabe 2.2

1. Für alle $x \in \mathbf{R}$ ist $exp\left(-x^2\right) \neq 0$, deshalb

$$f_n(x) = 0 \Longleftrightarrow x^{2n+1} exp\left(-x^2\right) = 0 \Longleftrightarrow x^{2n+1} = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

Die Ableitung berechnet man mit Produkt- und Kettenregel:

$$f_n'(x) = (2n+1)\, x^{2n} exp\left(-x^2\right) + x^{2n+1}(-2x)\, exp\left(-x^2\right) = \left(2n+1-2x^2\right) x^{2n} exp\left(-x^2\right).$$

2. Wegen $exp\left(-x^2\right) \neq 0$ ist

$$f_n'(x) = 0 \Longleftrightarrow \left(2n+1-2x^2\right) x^{2n} exp\left(-x^2\right) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$2n+1-2x^2 = 0 \text{ oder } x = 0 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2n+1}{2}} \text{ oder } x = 0.$$

Analog erhält man

$$f_n'(x) < 0 \Longleftrightarrow 2n+1-2x^2 < 0 \text{ und } x \neq 0 \Longleftrightarrow \mid x \mid > \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \text{ und } x \neq 0.$$

Die Funktion f_n ist also streng monoton fallend auf den Intervallen $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\right)$ und $\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2}}, \infty\right)$, streng monoton wachsend auf dem Intervall $\left(-\sqrt{\frac{2n+1}{2}}, \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\right)$.

Weiterhin ist

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_n(x) = 0, f_n(0) = 0$$

und

$$f_n\left(-\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\right) < 0, f_n\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\right) > 0.$$

Das Maximum von f_n ist also

$$f_n\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\right) = \left(\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\right)^{2n+1} exp\left(-\frac{2n+1}{2}\right)$$

und das Minimum von f_n ist

$$f_n\left(-\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\right) = -\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\right)^{2n+1} exp\left(-\frac{2n+1}{2}\right).$$

3. Aus $(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$ und $(-x)^2 = x^2$ folgt

$$(-x)^{2n+1} exp\left(-(-x)^2\right) = -x^{2n+1} exp\left(-x^2\right).$$

Einsetzen in die in 2. berechnete Ableitung gibt $f_n'(0) = 0$.
Für die Skizze von f_1 siehe den Sage-Ausdruck im Anhang.

4. Mit partieller Integration bekommt man

$$\int_0^1 f_1(x)\,dx = \int_0^1 x^3 exp\left(-x^2\right)dx = \int_0^1 -\frac{1}{2}x^2\left(-2xexp\left(-x^2\right)\right)dx$$

$$= \int_0^1 -\frac{1}{2}x^2\left(exp\left(-x^2\right)\right)'dx = -\frac{1}{2}x^2 exp\left(-x^2\right)|_0^1 + \int_0^1 xexp\left(-x^2\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 exp\left(-x^2\right)|_0^1 - \frac{1}{2}exp\left(-x^2\right)|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}.$$

Aufgabe 2.3

a) Wegen

$$\lim_{n\to\infty} |\,(-1)^n \frac{1}{n}\,|^{\frac{1}{n}} = 1$$

hat die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}(x-1)^n$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ den Konvergenzradius $R = 1$.

Für $x = 2$ bekommt man die konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$, für $x = 0$ die divergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Die Potenzreihe konvergiert also auf $(0,2]$.

b)

$$\int_1^2 \frac{ln(x)}{x}dx = \int_1^2 ln(x)\,ln'(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{2}\left((ln(x))^2\right)'dx = \frac{1}{2}ln(x)^2\,|_1^2 = \frac{1}{2}ln(2)^2.$$

c)

$$\int_0^u \frac{sin(x)}{cos(x)} = \int_0^u -\frac{cos(x)'}{cos(x)}dx = \int_0^u -ln(cos(x))'\,dx = -ln(cos(u))$$

d) folgt aus

$$\frac{d}{dx}\frac{-cos(x)}{sin(x)} = -\frac{-sin^2(x) - cos^2(x)}{sin^2(x)} = \frac{1}{sin^2(x)}.$$

Aufgabe 2.4

Weil F stetig ist, gibt es eine Stammfunktion G mit

$$G(v) - G(u) = \int_u^v F(x)\, dx$$

für alle $a \leq u < v \leq b$. Aus der Voraussetzung folgt $G(v) - G(u) = 0$ für alle $a \leq u < v \leq b$, also ist G konstant und nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung $F = G' \equiv 0$.