Aufgabe 4

a) Zur Abkürzung setzen wir

$$g\left(x,y\right)=-\frac{1}{4}\left(x^2-y^2\right),$$

also

$$f\left(x,y\right)=\left(x^2+y^2\right)e^{g(x,y)}.$$

Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2}x\left(4-x^2-y^2\right)e^{g(x,y)},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2}y\left(4+x^2+y^2\right)e^{g(x,y)}.$$

Wegen $e^{g(x,y)}>0$ und $4+x^2+y^2>0$ hat $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ die einzige Lösung $y=0$. Aus $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ folgt dann $x\left(4-x^2\right)=0$ also $x\in\{-2,0,2\}$. Lokale Extrema kann es also nur in $(-2,0),(0,0)$ und $(2,0)$ geben.

Es ist $f(0,0)=0$ und $f(x,y)>0$ für alle $(x,y)\neq(0,0)$. Also ist $(0,0)$ lokales und globales Minimum.

$(2,0)$ ist kein lokales Extremum, denn es ist

$$f\left(2+\frac{1}{n},0\right)<f\left(2,0\right)<f\left(2,\frac{1}{n}\right)$$

für alle $n>0$, d.h. in jeder Umgebung von $(2,0)$ gibt es Pukte mit kleineren und grösseren Funktionswerten.

Beweis:

1.Ungleichung:

$$f\left(2+\frac{1}{n},0\right)<f\left(2,0\right)\Longleftrightarrow\left(2+\frac{1}{n}\right)^2e^{-\frac{1}{4}\left(2+\frac{1}{n}\right)^2}<4e^{-1}$$

$$\Longleftrightarrow\left(1+\frac{1}{2n}\right)^2<e^{\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2}}\Longleftrightarrow1+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2}\right)<e^{\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2}}$$

Für alle $x\neq0$ gilt[1]: $e^x>1+x$. Mit $x=\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2}$ ergibt sich die letzte Ungleichung, durch äquivalentes Umformen also die Behauptung.

[1] Diese Ungleichung folgt aus $e^0=1$ und $(e^x)'>0$ für alle $x\in\mathbf{R}$.

2. Ungleichung:

$$f\left(2,\frac{1}{n}\right) > f(2,0) \Longleftrightarrow \left(4+\frac{1}{n^2}\right)e^{-\frac{1}{4}\left(4-\frac{1}{n^2}\right)} > 4e^{-1}$$

$$\Longleftrightarrow 1+\frac{1}{4n^2} > e^{-\frac{1}{4n^2}}.$$

Die letzte Ungleichung folgt aber direkt aus $1+\frac{1}{4n^2} > 1$ und $e^{-\frac{1}{4n^2}} < 1$.

$(-2,0)$ ist kein lokales Extremum, denn es ist

$$f\left(-2+\frac{1}{n},0\right) < f(-2,0) < f\left(-2,\frac{1}{n}\right)$$

für alle $n > 0$, d.h. in jeder Umgebung von $(-2,0)$ gibt es Pukte mit kleineren und grösseren Funktionswerten.

Beweis:

1.Ungleichung:

$$f\left(-2+\frac{1}{n},0\right) < f(-2,0) \Longleftrightarrow \left(-2+\frac{1}{n}\right)^2 e^{-\frac{1}{4}\left(-2+\frac{1}{n}\right)^2} < 4e^{-1}$$

$$\Longleftrightarrow \left(-1+\frac{1}{2n}\right)^2 < e^{-\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2}} \Longleftrightarrow 1+\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2}\right) < e^{-\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2}}$$

Für alle $x \neq 0$ ist $e^x > 1+x$. Mit $x = -\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2}$ ergibt sich die letzte Ungleichung, durch äquivalentes Umformen also die Behauptung.

2. Ungleichung:

$$f\left(-2,\frac{1}{n}\right) > f(-2,0) \Longleftrightarrow \left(4+\frac{1}{n^2}\right)e^{-\frac{1}{4}\left(4-\frac{1}{n^2}\right)} > 4e^{-1}$$

$$\Longleftrightarrow 1+\frac{1}{4n^2} > e^{-\frac{1}{4n^2}}.$$

Die letzte Ungleichung folgt aber direkt aus $1+\frac{1}{4n^2} > 1$ und $e^{-\frac{1}{4n^2}} < 1$.

b) Wegen 2π-Periodizizität genügt es, die Funktion auf $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ zu betrachten.

Die Ableitungen sind

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -sinx\,(siny + 1)\,, \frac{\partial g}{\partial y} = cosxcosy.$$

Lösungen von $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$ sind $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \left(0, -\frac{\pi}{2}\right), \left(\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right), \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ und $\left(x, -\frac{\pi}{2}\right)$ mit beliebigem x.

$\left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ und $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ sind lokale und globale Minima, denn es ist $g\left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right) = g\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = -2$ und $g\,(x, y) = cosx\,(siny + 1) \geq -2$ für alle x, y.

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ist ein lokales und globales Maximum, denn es ist $g\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 2$ und $g\,(x, y) = cosx\,(siny + 1) \leq 2$ für alle x, y.

$\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ ist ein lokales Minimum, denn es ist $g\left(0, -\frac{\pi}{2}\right) = 0$ und für alle $(x, y) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (-\pi, \pi)$ ist $g\,(x, y) \geq 0$.

$\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ und $\left(\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ sind lokale Maxima, denn es ist $g\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) = g\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) = 0$ und für alle $(x, y) \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) \times (-\pi, \pi)$ resp. alle $(x, y) \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \times (-\pi, \pi)$ ist $g\,(x, y) \leq 0$.

$\left(x_0, -\frac{\pi}{2}\right)$ ist:
- für $cos\,(x_0) > 0$ ein lokales Minimum, denn es ist $g\left(x_0, -\frac{\pi}{2}\right) = 0$ und $cosx \geq 0, siny \geq -1 \Longrightarrow g\,(x, y) \geq 0$ für alle (x, y) in einer kleinen Umgebung
- für $cos\,(x_0) < 0$ ein lokales Maximum, denn es ist $g\left(x_0, -\frac{\pi}{2}\right) = 0$ und $cosx \leq 0, siny \geq -1 \Longrightarrow g\,(x, y) \geq 0$ für alle (x, y) in einer kleinen Umgebung
- für $cos\,(x_0) = 0$ kein lokales Extremum, denn in jeder hinreichend kleinen Umgebung gibt es positive und negative Funktionswerte.

Also hat g globale Minima in $\left(\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2l\pi\right)$ und globale Maxima in $\left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2l\pi\right)$ für $k, l \in \mathbf{Z}$.

Aufgabe 5
Sei $h = (h_1, h_2) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. Dann ist

$$b(x + h_1, y + h_2) - b(x, y)$$
$$= b(x + h_1, y + h_2) - b(x + h_1, y) + b(x + h_1, y) - b(x, y)$$
$$= b(x + h_1, h_2) + b(h_1, y)$$
$$= b(x, h_2) + b(h_1, y) + b(h_1, h_2).$$

Weil b bilinear ist, ist

$$g(h) = g(h_1, h_2) = b(x, h_2) + b(h_1, y)$$

eine lineare Funktion von h.

Weil $\{(v_1, v_2) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : \| v_1 \| = \| v_2 \| = 1\}$ kompakt ist und bilineare Funktionen stetig sind, gibt es eine Konstante C mit $b(v_1, v_2) \leq C$ für alle $(v_1, v_2) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ mit $\| v_1 \| = \| v_2 \| = 1$. Wegen der Bilinearität von b folgt

$$b(h_1, h_2) = b\left(\frac{h_1}{\| h_1 \|}, \frac{h_2}{\| h_2 \|}\right) \| h_1 \| \| h_2 \| \leq C \| h_1 \| \| h_2 \| \leq C \| h \|^2$$

für alle $h = (h_1, h_2) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

Also ist b differenzierbar mit

$$db(x, y)(h_1, h_2) = b(x, h_2) + b(h_1, y).$$

Weil b bilinear ist, ist db linear bzgl. (x, y):

$$db(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2)(h_1, h_2) = b(x_1 + \lambda x_2, h_2) + b(h_1, y_1 + \lambda y_2)$$

$$= b(x_1, h_2) + \lambda b(x_2, h_2) + b(h_1, y_1) + \lambda b(h_1, y_2) = db(x_1, y_1)(h_1, h_2) + \lambda db(x_2, y_2)(h_1, h_2).$$

$db : \mathbf{R}^{2n} \to L\left(\mathbf{R}^{2n}, \mathbf{R}\right)$ ist eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen, also stetig.