**Aufgabe 4**

a) Sei $v = (v_1, v_2) \in \mathbf{R}^2$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(hv) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(hv_1)^2 (hv_2)}{h\left((hv_1)^2 + (hv_2)^2\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Insbesondere ist $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$.

b) Angenommen, $f$ wäre total differenzierbar. Dann wäre $D_{(0,0)}f$ die Matrix, in deren Spalten die partiellen Ableitungen stehen, also $D_{(0,0)}f = 0$. Dann müßten aber *alle* Richtungsableitungen Null sein. Dieser Widerspruch zeigt, dass $f$ in $(0,0)$ nicht total differenzierbar ist.

c) $f(u_1, u_2) = u_1$ und $f(u_1, u_2) = u_2$ sind total differenzierbar. Weil die total differenzierbaren Funktionen einen Ring und einen Vektorraum bilden, ist dann auch $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_1^i u_2^j$ total differenzierbar. Es gibt also kein Polynom, das im Nullpunkt nicht differenzierbar ist.

**Aufgabe 5**

$f$ ist nach unten beschränkt durch 0 und es gilt $\lim_{u\to\infty} f(u) = \infty$. Es muß also mindestens ein Minimum von $f$ geben. (Begründung: Wegen $\lim_{u\to\infty} f(u) = \infty$ gibt es ein $R_0 > 0$ mit $f(x) > f(0)$ für alle $x > R_0$. Auf der kompakten Menge $K := \left\{x \in \mathbf{R}^2 : \| x \| \leq R_0\right\}$ nimmt die stetige Funktion $f$ ein Minimum $M$ an, für alle $x \notin K$ ist $f(x) > f(0) \geq M$. Also ist $M$ auch ein Minimum von $f$ auf ganz $\mathbf{R}^2$.)

$f$ ist nicht differenzierbar in $a, b, c$.

Wenn $f$ ein Minimum in $u \notin \{a, b, c\}$ hat, dann ist $\frac{\partial f}{\partial u_1}(u) = \frac{\partial f}{\partial u_2}(u) = 0$.

Die partiellen Ableitungen von

$$f(u_1, u_2) = \sqrt{(u_1 - a_1)^2 + (u_2 - a_2)^2} + \sqrt{(u_1 - b_1)^2 + (u_2 - b_2)^2} + \sqrt{(u_1 - c_1)^2 + (u_2 - c_2)^2}$$

sind

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{u_1 - a_1}{\| u - a \|} + \frac{u_1 - b_1}{\| u - b \|} + \frac{u_1 - c_1}{\| u - c \|},$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_2} = \frac{u_2 - a_2}{\| u - a \|} + \frac{u_2 - b_2}{\| u - b \|} + \frac{u_2 - c_2}{\| u - c \|}.$$

Sei $u \notin \{a, b, c\}$.

Setze

$$\xi := (u_1 - a_1, u_1 - b_1, u_1 - c_1), \eta := (u_2 - a_2, u_2 - b_2, u_2 - c_2),$$

$$\rho := \left(\frac{1}{\| u - a \|}, \frac{1}{\| u - a \|}, \frac{1}{\| u - a \|}\right) \in \mathbf{R}^3.$$

Wenn $u$ ein kritischer Punkt von $f$ ist, dann ist

$$< \xi, \rho >= \frac{\partial f}{\partial x} = 0, < \eta, \rho >= \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

d.h. $\rho$ steht senkrecht auf $\xi$ und $\eta$, also ist

$$\rho = c\xi \times \eta$$

für ein $c \in \mathbf{R}$. (Wir können annehmen, dass $\xi$ und $\eta$ linear unabhängig sind, sonst liegen $a, b, c$ auf einer Geraden und jeder Punkt zwischen $a$ und $c$ minimiert $f$.)

Die erste Koordinate des Kreuzprodukts ist

$$det \begin{pmatrix} u_1 - b_1 & u_1 - c_1 \\ u_2 - b_2 & u_2 - c_2 \end{pmatrix} = \text{Fläche}(u - b, u - c) = \| u - b \| \| u - c \| sin\alpha_1,$$

analog für die beiden anderen Einträge. ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sind die Winkel zwischen den Verbindungsstrecken von $u$ zu den Punkten $a, b, c$.)

Es folgt

$$\frac{1}{\| u-a \|} = c \| u-b \| \| u-c \| \, sin\alpha_1,$$

also

$$1 = c \| u-a \| \| u-b \| \| u-c \| \, sin\alpha_1,$$

analog

$$1 = c \| u-a \| \| u-b \| \| u-c \| \, sin\alpha_2, 1 = c \| u-a \| \| u-b \| \| u-c \| \, sin\alpha_3,$$

also $sin\alpha_1 = sin\alpha_2 = sin\alpha_3$, wegen $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi$ also

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{2\pi}{3}.$$

(Den Punkt $u$ kann man wie folgt konstruieren: man trage über der Seite $\overline{ab}$ und ber der Seite $\overline{bc}$ jeweils ein gleichseitiges Dreieck (nach außen) auf, die Eckpunkte seien $c', a'$. Der Schnittpunkt der Strecken $\overline{aa'}$ und $\overline{cc'}$ ist der gesuchte Punkt $u$. Siehe http://de.wikipedia.org/wiki/Fermat-Punkt .)

Das Minimum von $f$ muß also entweder in einem der Punkte $a, b, c$ oder im oben konstruierten Punkt $u$ vorliegen. Durch expliziten Vergleich von $f(a), f(b), f(c), f(u)$ erhält man:

Wenn im Dreieck mit Ecken $a, b, c$ alle Innenwinkel kleiner als $\frac{2\pi}{3}$ sind, dann ist der oben konstruierte Punkt $u$ das Minimum von $f$.

Wenn im Dreieck mit Ecken $a, b, c$ ein Innenwinkel, o.B.d.A. der Innenwinkel bei $a$, mindestens $\frac{2\pi}{3}$ ist, dann ist $a$ das Minimum von $f$.