Aufgabe 4

$$L_{ab} = \int_a^b \sqrt{\left(-e^{rt}sin\left(t\right) + re^{rt}cos\left(t\right)\right)^2 + \left(e^{rt}cos\left(t\right) + re^{rt}sin\left(t\right)\right)^2}dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{e^{2rt}\left(sin^2\left(t\right) + cos^2\left(t\right)\right) + r^2e^{2rt}\left(sin^2\left(t\right) + cos^2\left(t\right)\right)}dt = \int_a^b \sqrt{r^2+1}e^{rt}dt$$

$$= \frac{\sqrt{r^2+1}}{r}\left(e^{rb} - e^{ra}\right).$$

Insbesondere ist für $r > 0$

$$\lim_{a\to-\infty} L_{a,0} = \frac{\sqrt{r^2+1}}{r}\lim_{a\to-\infty}\left(1 - e^{ra}\right) = \frac{\sqrt{r^2+1}}{r}$$

bzw. für $r < 0$

$$\lim_{a\to-\infty} L_{a,0} = \frac{\sqrt{r^2+1}}{r}\lim_{a\to-\infty}\left(1 - e^{ra}\right) = \infty.$$

Fall 1: $r > 0$: $\| c\left(t\right) \| = e^{rt}$ ist streng monoton wachsend, es ist

$$\lim_{t\to-\infty} e^{rt} = 0$$

und

$$\lim_{t\to\infty} e^{rt} = \infty,$$

also wird jede positive Zahl für genau ein t als Wert von $\| c\left(t\right) \|$ angenommen.
Fall 2: $r < 0$: $\| c\left(t\right) \| = e^{rt}$ ist streng monoton fallend, es ist

$$\lim_{t\to-\infty} e^{rt} = \infty$$

und

$$\lim_{t\to\infty} e^{rt} = 0,$$

also wird jede positive Zahl für genau ein t als Wert von $\| c\left(t\right) \|$ angenommen.

Aufgabe 5

Wir beweisen zunächst $L(c) \geq l_Z(c)$ für jede Zerlegung Z.
Sei Z gegeben durch

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b.$$

Dann ist

$$l_Z(c) = \sum_{j=1}^{k} \parallel c(a_j) - c(a_{j-1}) \parallel$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \parallel (c_1(a_j) - c_1(a_{j-1}), \ldots, c_n(a_j) - c_n(a_{j-1})) \parallel = \sum_{j=1}^{k} \parallel \left(\int_{a_{j-1}}^{a_j} c_1'(t)\, dt, \ldots, \int_{a_{j-1}}^{a_j} c_n'(t)\, dt \right) \parallel$$

nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.
Mit Aufgabe 7.2 bekommen wir

$$\sum_{j=1}^{k} \parallel \left(\int_{a_{j-1}}^{a_j} c_1'(t)\, dt, \ldots, \int_{a_{j-1}}^{a_j} c_n'(t)\, dt \right) \parallel = \sum_{j=1}^{k} \parallel \int_{a_{j-1}}^{a_j} c'(t)\, dt \parallel$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} \int_{a_{j-1}}^{a_j} \parallel c'(t) \parallel dt = \int_a^b \parallel c'(t) \parallel dt = L(c),$$

also die gewünschte Ungleichung $l_Z(c) \leq L(c)$.

Wir beweisen jetzt, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zerlegung Z mit
$L(c) < l_Z(c) + \epsilon$ gibt.

Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$. Weil c_i' stetig ist, gibt es eine Folge von Unterteilungen $Z_{il} = \{a = a_{il0} < a_{il1} < a_{il2} < \ldots < b\}$, so dass die Folge $(d_{il})_l$ der mittels dieser Unterteilung definierten Stufenfunktionen

$$d_{il}(x) := c_i'(a_{ilk}) \text{ für } a_{il,k-1} < x \leq a_{ilk}$$

gleichmäßig gegen c_i' konvergiert. Insbesondere gibt es ein L_i mit

$$\parallel d_{il} - c_i' \parallel_\infty < \frac{\epsilon}{2\sqrt{n}(b-a)}$$

für alle $l > L_i$.

Zu jedem l wählen wir eine Unterteilung $Z_l = \{a = a_{l0} < a_{l1} < a_{l2} < \ldots < a_{lk_l} = b\}$, die $Z_{1l}, \ldots, Z_{nl}$ enthält und in der nur Intervalle der Länge $< \frac{1}{l}$ vorkommen, d.h. $\mid a_{li} - a_{l,i+1} \mid < \frac{1}{l} \mid$ für alle i. (Dies kann man erreichen, indem man die Vereinigung aller a_{ilk} und zusätzlich die Menge aller $a + \frac{j}{2l}$ mit $j = 1, \ldots, [2l(b-a)]$ nimmt.)

Setze

$$d_l := (d_{1l}, \ldots, d_{nl}) : [a,b] \to \mathbf{R}^n.$$

Dann ist

$$\| d_l \| = \sqrt{(d_{1l})^2 + \ldots + (d_{nl})^2}$$

eine Stufenfunktion zu der Unterteilung Z_l und wir haben

$$\|\| c' \| - \| d_l \|\|_\infty < \frac{\epsilon}{2(b-a)},$$

woraus

$$L(c) = \int_a^b \| c' \| \, dt < \int_a^b \| d_l \| \, dt + \frac{\epsilon}{2}$$

folgt.

Für das Integral der Stufenfunktion $\| d_l \|$ haben wir

$$\int_a^b \| d_l(t) \| \, dt = \sum_{j=1}^{k_l} \| c'(a_{lj}) \| (a_{lj} - a_{l,j-1}).$$

Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$. Weil c_i' stetig ist, gibt es ein $\delta_i > 0$, so dass aus

$$| x - y | < \delta_i$$

immer

$$| c_i'(x) - c_i'(y) | < \frac{\epsilon}{2(b-a)\sqrt{n}}$$

folgt. Setze $L = sup\left\{\left[\frac{1}{\delta_1}\right], \ldots, \left[\frac{1}{\delta_n}\right]\right\} + 1$. Für $l > L$ haben dann alle Intervalle in Z_l eine Länge kleiner als $\frac{1}{l} < \delta_i$. Insbesondere: wenn x und y zum selben Intervall der Zerlegung Z_l gehören, dann ist $| c_i'(x) - c_i'(y) | < \frac{\epsilon}{2(b-a)\sqrt{n}}$ für $i = 1, \ldots, n$.

Sei $l \in \mathbf{N}, j \in \{1, \ldots, k_l\}$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi_i \in [a_{l,j-1}, a_{lj}]$ mit

$$c_i'(\xi_i)(a_{lj} - a_{l,j-1}) = c_i(a_{lj}) - c_i(a_{l,j-1}).$$

Wegen $| c_i'(a_{lj}) | < | c_i'(\xi_i) | + \frac{\epsilon}{2(b-a)\sqrt{n}}$ folgt

$$| c_i'(a_{lj}) | (a_{lj} - a_{l,j-1}) < | c_i(a_{lj}) - c_i(a_{l,j-1}) | + \frac{\epsilon}{2(b-a)\sqrt{n}} (a_{lj} - a_{l,j-1}),$$

also

$$\| c'(a_{lj}) \| (a_{lj} - a_{l,j-1}) < \| c(a_{lj}) - c(a_{l,j-1}) \| + \frac{\epsilon}{2(b-a)} (a_{lj} - a_{l,j-1}).$$

Durch Aufsummieren erhält man

$$\sum_{j=1}^{k_l} \| c'(a_{lj}) \| (a_{lj} - a_{l,j-1}) < l_{Z_l}(c) + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum_{j=1}^{k_l} (a_{lj} - a_{l,j-1}) = l_{Z_l}(c) + \frac{\epsilon}{2}.$$