

Aufgabe 1

a) Weil X offen in X ist, ist $X \subset X^\circ$. Für jede offene Menge U in X gilt $U \subset X$, deshalb ist $X^\circ \subset X$.

b)

$$\begin{aligned} Z^\circ &= \bigcup \{U \subset Z : U \text{ offen}\} = \bigcup \{U \subset Z : X - U \text{ abgeschlossen}\} = \\ &= \bigcup \{X - (X - U) \subset Z : X - U \text{ abgeschlossen}\} = \bigcup \{X - A \subset Z : A \text{ abgeschlossen}\} = \\ &= \bigcup \{X - A : A \subset X - Z \text{ abgeschlossen in } Z\} = \\ &= X - \bigcap \{A \subset Z : A \subset X - Z \text{ abgeschlossen in } Z\} = X - \overline{X - Z}. \end{aligned}$$

c) Für offene Mengen $U \subset X$ gilt nach Definition von Z° :

$$U \subset Z \iff U \subset Z^\circ.$$

Weil Z° die Vereinigung aller offenen Teilmengen von Z ist, folgt $(Z^\circ)^\circ = Z^\circ$.

d) Sei $x \in (Z_1 \cap Z_2)^\circ$. Dann gibt es eine offene Menge $U \subset Z_1 \cap Z_2$ mit $x \in U$. Aus $Z_1 \cap Z_2 \subset Z_1$ bzw. $Z_1 \cap Z_2 \subset Z_2$ folgt dann auch $U \subset Z_1$ bzw. $U \subset Z_2$, also $x \in Z_1^\circ$ und $x \in Z_2^\circ$, also $x \in Z_1^\circ \cap Z_2^\circ$. Umgekehrt, sei $x \in Z_1^\circ \cap Z_2^\circ$, dann gibt es eine offene Menge $U_1 \subset Z_1$ mit $x \in U_1$ und eine offene Menge $U_2 \subset Z_2$ mit $x \in U_2$. Dann ist $U_1 \cap U_2 \subset Z_1 \cap Z_2$ eine offene Menge mit $x \in U_1 \cap U_2$, also $x \in (Z_1 \cap Z_2)^\circ$.

e) Z° ist Vereinigung von Teilmengen von Z , also $Z^\circ \subset Z$. Wenn Z offen ist, dann ist $Z \subset Z^\circ$, also $Z = Z^\circ$. Umgekehrt, sei $Z = Z^\circ$. Dann gilt für jeden Punkt $z \in Z$ auch $z \in Z^\circ$, es gibt also eine offene Menge $U \subset Z$ mit $x \in U$. Also ist Z offen.

f) $\mathbf{R} = \mathbf{R}^0$ nach a). $\mathbf{Z}^\circ = \emptyset$ und $\mathbf{Q}^\circ = \emptyset$, weil $\emptyset$ die einzige offene Teilmenge von $\mathbf{Q}$ ist. $[0, 1]^\circ = (0, 1)$, weil $(0, 1)$ offen ist und weil eine offene Menge, die 0 oder 1 enthält, keine Teilmenge von $[0, 1]$ sein kann.

Aufgabe 2

a) Richtig. Sei X kompakt, $A \subset X$ abgeschlossen. Sei (x_n) eine Folge in A . Weil X kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge x_{n_k} . Sei $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$. Weil A abgeschlossen ist, ist $x \in A$. Also konvergiert die Teilfolge auch in A .

b) Richtig. Sei X endlich. Sei (x_n) eine Folge in X . Weil X endlich ist, muss es nach dem Schubfachprinzip (mindestens) ein $x \in X$ geben, so dass $x_n = x$ für unendlich viele $n \in \mathbf{N}$ gilt. Die Teilfolge derjenigen x_n mit $x_n = x$ ist dann eine konstante (also konvergente) Teilfolge.

c) Richtig: die kompakte Menge B ist abgeschlossen, f ist stetig, also ist $f^{-1}(B)$ abgeschlossen.

d) Falsch. Zum Beispiel: $X = Y = \mathbf{R}, f(x) \equiv 0, B = \{0\}$: $f^{-1}(B) = \mathbf{R}$ ist nicht kompakt.

Aufgabe 3

M_0 hat keine der Eigenschaften, M_1 ist abgeschlossen und vollständig, M_2 ist offen, M_3 ist abgeschlossen, vollständig und kompakt, M_4 ist abgeschlossen und vollständig, M_5 ist offen, M_6 ist abgeschlossen, vollständig und kompakt, M_7 ist abgeschlossen und vollständig.