Aufgabe 4

a) Die Behauptung ist falsch. Beispiel: $X = [0, 1]\,, Y = [0, 1]\,,$

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

f ist stetig, aber nicht Lipschitz-stetig:

Angenommen, es gäbe ein $L > 0$ mit

$$\mid f(y) - f(x) \mid \leq L \mid y - x \mid$$

für alle $x, y \in [0, 1]$. (Das gilt dann erst recht für grössere L, o.B.d.A. können wir also $L > 1$ annehmen.)

Insbesondere gälte die Ungleichung dann auch für

$$y = \frac{1}{4L^2}, x = 0.$$

Für diese Werte von x, y ist aber

$$\mid f(y) - f(x) \mid = \frac{1}{2L}$$

und

$$L \mid y - x \mid = \frac{1}{4L},$$

womit wir den Widerspruch $\frac{1}{2L} < \frac{1}{4L}$ bekommen würden.

b) Sei (y_n) eine Folge in Y mit

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Wir wollen beweisen, dass $\lim_{n\to\infty} F(y_n) = F(y)$. Angenommen, das wäre nicht der Fall, dann gibt es entweder zu einem $\epsilon > 0$ unendlich viele n mit $F(y_n) < F(y) - \epsilon$ (Fall 1) oder zu einem $\epsilon > 0$ unendlich viele n mit $F(y_n) > F(y) + \epsilon$ (Fall 2).

Fall 1: Weil X kompakt ist, gibt es nach dem Satz von Weierstraß ein $x_0 \in X$ mit

$$F(y) = sup\{f(x,y) : x \in X\} = f(x_0, y).$$

Wegen

$$F(y_n) \geq f(x_0, y_n)$$

folgt

$$f(x_0, y_n) < f(x_0, y) - \epsilon$$

für unendlich viele n. Das widerspricht der Stetigkeit von f.

Fall 2: Nach Annahme gibt es eine Teilfolge $(y_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ mit

$$F(y_{n_k}) > F(y) + \epsilon$$

für alle $k \in \mathbf{N}$.

Weil X kompakt ist, gibt es nach dem Satz von Weierstraß zu jedem y_n ein $x_n \in X$ mit

$$F(y_n) = sup\{f(x, y_n) : x \in X\} = f(x_n, y_n).$$

Insbesondere ist

$$f(x_{n_k}, y_{n_k}) > F(y) + \epsilon$$

für alle $k \in \mathbf{N}$.

Weil X kompakt ist, hat $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ eine konvergente Teilfolge $\left(x_{n_{k_l}}\right)_{l\in\mathbf{N}}$. Setze $x = \lim_{l\to\infty} x_{n_{k_l}}$. Weil f stetig ist, folgt

$$f(x,y) = \lim_{l\to\infty} f\left(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}}\right) \geq F(y) + \epsilon > F(y) = sup\{f(x,y) : x \in X\}.$$

Das widerspricht der Definition des Supremums.

Beide Fälle sind zum Widerspruch geführt, also ist $\lim_{n\to\infty} F(y_n) = F(y)$.

Aufgabe 5

a) $f(x) = \frac{1}{2}cos(x)$ ist nach Aufgabe 2a) eine kontrahierende Abbildung $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, denn für $x \in \mathbf{R}$ ist

$$\mid f'(x) \mid = \mid \frac{1}{2}sin(x) \mid \leq \frac{1}{2} < 1.$$

$\mathbf{R}$ ist vollständig. Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz gibt es einen eindeutigen Fixpunkt.

b) Wir betrachten die Einschränkungen von $f(x) = e^{-x}$ auf die drei Intervalle $\left(-\infty, \frac{1}{e}\right)$, $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ und $(1, \infty)$.

Für $x < \frac{1}{e}$ ist insbesondere $x < 1$ und damit (weil f streng monoton fallend ist)

$$x < \frac{1}{e} = f(1) < f(x) = e^{-x}.$$

Auf $\left(-\infty, \frac{1}{10}\right)$ gibt es also keinen Fixpunkt von e^{-x}.

Für $x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$ ist (weil f streng monoton fallend ist)

$$\frac{1}{e} = f(1) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{e}\right) < f(0) = 1,$$

insbesondere bildet f also das Intervall $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ auf sich selbst ab.

Auf $\left[\frac{1}{e}, \infty\right)$ ist $f(x) = e^{-x}$ nach Aufgabe 2a) kontrahierend, denn es ist

$$\mid f'(x) \mid = \mid -e^{-x} \mid = e^{-x} \leq e^{-\frac{1}{10}} < 1.$$

Das Intervall $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbf{R}$, damit vollständig. Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz gibt es auf $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ einen eindeutigen Fixpunkt.

Für $x > 1$ ist (weil f streng monoton fallend ist)

$$x > 1 > \frac{1}{e} = f(1) > f(x) = e^{-x}.$$

Auf $(1, \infty)$ gibt es also keinen Fixpunkt von e^{-x}.

Insgesamt hat $f(x) = e^{-x}$ also einen eindeutigen Fixpunkt auf $\mathbf{R}$.