Aufgabe 3

Wir beweisen $\| A^k \| \leq \| A \|^k$ durch vollständige Induktion nach $k \in \mathbf{N}$:
- Für $k = 1$ ist $\| A^1 \| = \| A \|^1$.
- Induktionsschritt von k auf $k+1$: Sei $\| A^k \| \leq \| A \|^k$, dann ist

$$\| A^{k+1} \| = \| A^k A \| \leq \| A^k \| \| A \| \leq \| A \|^k \| A \| = \| A \|^{k+1} .$$

Wir beweisen jetzt die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ für $\| A \| < 1$.

Sei $\| A \| < 1$. Dann konvergiert die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| A \|^k .$$

Insbesondere gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbf{N}$ mit

$$\sum_{k=m+1}^{n} \| A \|^k < \epsilon$$

für alle $m, n > N$.

Wegen $\| A^k \| \leq \| A \|^k$ und der Dreiecksungleichung folgt daraus

$$\| \sum_{k=m+1}^{n} A^k \| < \epsilon$$

für alle $m, n > N$. Die Partialsummenfolge $s_n = \sum_{k=0}^{n} A^k$ ist also eine Cauchy-Folge.

In der Vorlesung wurde bewiesen, dass jeder endlich-dimensionale normierte Vektorraum vollständig ist. Insbesondere gilt dies für den Vektorraum der nxn-Matrizen mit einer Operatornorm. Deshalb konvergiert die Cauchy-Folge $s_n = \sum_{k=0}^{n} A^k$.

Da die Reihe $\sum_{k=}^{\infty} A^k$ konvergiert, können wir sie mit I-A multiplizieren und erhalten

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k \right) (I - A) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k - \sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1} = I + \sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1} = I,$$

also $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}$.

Aufgabe 4

a) Wegen

$$\phi_1(f) + \phi_1(g) = f(1) + g(1) = (f+g)(1) = \phi_1(f+g)$$

für $f, g \in C^1([0,2], \mathbf{R})$und

$$\phi_1(\lambda f) = \lambda f(1) = \lambda \phi_1(f)$$

für $f \in C^1([0,2], \mathbf{R})$, $\lambda \in \mathbf{R}$ ist ϕ_1 linear.

Wegen

$$\phi_2(f) + \phi_2(g) = f'(1) + g'(1) = (f+g)'(1) = \phi_2(f+g)$$

für $f, g \in C^1([0,2], \mathbf{R})$ und

$$\phi_2(\lambda f) = (\lambda f)'(1) = \lambda f'(1) = \lambda \phi_2(f)$$

für $f \in C^1([0,2], \mathbf{R})$, $\lambda \in \mathbf{R}$ ist ϕ_2 linear.

b) Stetigkeit von ϕ_1 bzgl. $\| . \|_\infty$:

Zu zeigen ist: für alle $\epsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass aus $\| f - g \|_\infty < \delta$ stets folgt: $| \phi_1(f) - \phi_1(g) | < \epsilon$.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wir setzen $\delta := \epsilon$. Aus $\| f - g \|_\infty < \delta = \epsilon$ folgt

$$| \phi_1(f) - \phi_1(g) | = | f(1) - g(1) | \leq sup\{ | f(x) - g(x) | : x \in [0,2] \} = \| f - g \|_\infty < \epsilon.$$

Unstetigkeit von ϕ_2 bzgl. $\| . \|_\infty$:

ϕ_2 ist nicht stetig bzgl. der $\| . \|_\infty$-Norm. Betrachte zum Beispiel

$$g_n(x) = \frac{1}{n} sin(2\pi n x).$$

Dann ist

$$\| g_n \|_\infty = \frac{1}{n},$$

denn es ist $| g_n(x) | \leq \frac{1}{n}$ für alle x und $g_n\left(\frac{1}{4n}\right) = \frac{1}{n}$. Der Grenzwert in $C^1([0,2], \mathbf{R})$ist also

$$\lim_{n \to \infty} g_n = 0.$$

Andererseits ist

$$g_n'(x) = 2\pi cos(2\pi n x),$$

insbesondere

$$\phi_2(g_n) = g_n'(1) = 2\pi,$$

also

$$\lim_{n \to \infty} \phi_2(g_n) \neq 0 = \phi_2(0).$$

ϕ_2 ist nicht stetig in $0 \in C^1([0,2], \mathbf{R})$.

Stetigkeit von ϕ_1 bzgl. $\| \, . \, \|_{C^1}$:

Zu zeigen ist: für alle $\epsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass aus $\| f - g \|_{C^1} < \delta$ stets folgt: $| \phi_1 (f) - \phi_1 (g) | < \epsilon$.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wir setzen $\delta := \epsilon$. Aus $\| f - g \|_{C^1} < \delta = \epsilon$ folgt

$$| \phi_1 (f) - \phi_1 (g) | = | f (1) - g (1) | \leq sup \{ | f (x) - g (x) | : x \in [0, 2] \} = \| f - g \|_\infty \leq \| f - g \|_{C^1} < \epsilon.$$

Stetigkeit von ϕ_2 bzgl. $\| \, . \, \|_{C^1}$:

Zu zeigen ist: für alle $\epsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass aus $\| f - g \|_{C^1} < \delta$ stets folgt: $| \phi_2 (f) - \phi_2 (g) | < \epsilon$.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wir setzen $\delta := \epsilon$. Aus $\| f - g \|_{C^1} < \delta = \epsilon$ folgt

$$| \phi_2 (f) - \phi_2 (g) | = | f' (1) - g' (1) | \leq sup \{ | f' (x) - g' (x) | : x \in [0, 2] \} = \| (f - g)' \|_\infty \leq \| f - g \|_{C^1} < \epsilon.$$

Anmerkung: **weil in a) bereits die Linearität von ϕ_1 und ϕ_2 bewiesen wurde, hätte es genügt, jeweils Stetigkeit in 0 zu überprüfen.**

c) Stetigkeit der Multiplikation:

Weil die Multiplikation bilinear ist, genügt es nach Blatt 3 Stetigkeit in $(0, 0)$ zu überprüfen.

Wir zeigen: für alle $\epsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass für beliebige $f, g \in C^1 ([0, 2], \mathbf{R})$aus $\| (f, g) \| < \delta$ stets $\| fg \|_\infty \leq \epsilon$ folgt.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wir setzen $\delta := \sqrt{\epsilon}$. Aus

$$max \{ \| f \|_\infty, \| g \|_\infty \} = \| (f, g) \| < \delta = \sqrt{\epsilon}$$

folgt $\| f \|_\infty < \delta$ und $\| g \|_\infty < \delta$. Für alle $x \in [0, 2]$ gilt also

$$| f (x) | < \delta, | g (x) | < \delta$$

und damit

$$| f (x) g (x) | < \delta^2 = \epsilon.$$

Es folgt

$$\| fg \|_\infty = sup \{ | f (x) g (x) | : x \in [0, 2] \} \leq \epsilon.$$