Aufgabe 4

Wegen

$$d\left(y,A\right)=inf\left\{d\left(y,a\right):a\in A\right\}$$

gibt es zu jedem $\epsilon>0$ ein $a\in A$ mit

$$d\left(y,a\right)\leq d\left(y,A\right)+\epsilon.$$

Nach Dreiecksungleichung ist

$$d\left(x,a\right)-d\left(y,a\right)\leq d\left(x,y\right),$$

woraus

$$d\left(x,A\right)-d\left(y,A\right)\leq d\left(x,a\right)-\left(d\left(y,a\right)-\epsilon\right)\leq d\left(x,y\right)+\epsilon$$

folgt. Weil dies für jedes $\epsilon>0$ gilt, muss

$$d\left(x,A\right)-d\left(y,A\right)\leq d\left(x,y\right)$$

sein.

Analog zeigt man

$$d\left(y,A\right)-d\left(x,A\right)\leq d\left(x,y\right).$$

Insgesamt also

$$\mid d\left(x,A\right)-d\left(y,A\right)\mid\leq d\left(x,y\right),$$

d.h.

$$x\rightarrow d\left(x,A\right)$$

ist 1-Lipschitzstetig.

Aufgabe 5

a) Die Behauptung ist falsch. Z.B. ist

$$f\left(x\right)=\frac{x^2}{x^2+1}$$

stetig mit

$$f\left(\mathbf{R}\right)=\left[0,1\right)$$

oder

$$f\left(x\right)=arctan\left(x\right)$$

ist stetig mit

$$f\left(\mathbf{R}\right)=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

b) Die Behauptung ist richtig. Sei

$$x_n \to x$$

und

$$x_n \in f^{-1}(B)$$

für alle n, dann ist

$$f(x_n) \in B$$

und (weil f stetig ist)

$$f(x_n) \to f(x).$$

Weil B abgeschlossen ist, folgt

$$f(x) \in B,$$

also

$$x \in f^{-1}(B).$$

Aufgabe 6

$1 \Longrightarrow 2$: wenn b in jedem Punkt stetig ist, ist es insbesondere in $(0,0)$ stetig.

$2 \Longrightarrow 3$: weil b stetig in $(0,0)$ ist, gibt es nach Aufgabe 2 ein $\delta > 0$ mit

$$\| (x,y) \| < \delta \Longrightarrow | b(x,y) | < 1.$$

Setze $C = \frac{4}{\delta^2}$. Für beliebige $(v,w) \in V \times W$ ist

$$\| \frac{\delta}{2 \| v \|} v \| = \frac{\delta}{2} = \| \frac{\delta}{2 \| w \|} w \|,$$

also

$$\| \left(\frac{\delta}{2 \| v \|} v, \frac{\delta}{2 \| w \|} w \right) \| = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

woraus (nach Definition von δ)

$$| b \left(\frac{\delta}{2 \| v \|} v, \frac{\delta}{2 \| w \|} w \right) | < 1$$

folgt, wegen der Bilinearität von b also

$$| b(v,w) | < \frac{4}{\delta^2} \| v \| \| w \| .$$

$3 \Longrightarrow 1$: Wir wollen für beliebiges $(v, w) \in V \times W$ beweisen, dass b stetig in (v, w) ist.

Sei

$$(v_n, w_n) \rightarrow (v, w)\,,$$

d.h.

$$\| (v_n, w_n) - (v, w) \| \rightarrow 0.$$

Wegen

$$\| (v_n, w_n) - (v, w) \| = max\, \{\| v_n - v \|, \| w_n - w \|\}$$

ist

$$0 \leq \| v_n - v \| \leq \| (v_n, w_n) - (v, w) \|, 0 \leq \| w_n - w \| \leq \| (v_n, w_n) - (v, w) \|,$$

es folgt also

$$\| v_n - v \| \rightarrow 0, \| w_n - w \| \rightarrow 0.$$

Wegen der Bilinearität von b haben wir

$$b\,(v_n, w_n) - b\,(v, w) = b\,(v_n, w_n) - b\,(v, w_n) + b\,(v, w_n) - b\,(v, w) = b\,(v_n - v, w_n) + b\,(v, w_n - w)\,.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt daraus

$$|\; b\,(v_n, w_n) - b\,(v, w) \;| \leq |\; b\,(v_n - v, w_n) \;| + |\; b\,(v, w_n - w) \;|\,.$$

Mit 3. erhalten wir

$$|\; b\,(v_n, w_n) - b\,(v, w) \;| \leq C \| v_n - v \| \| w_n \| + C \| v \| \| w_n - w \|\,.$$

Wegen $w_n \rightarrow w$ gibt es zu $\epsilon = 1$ ein $N \in \mathbf{N}$ mit $\| w_n - w \| < 1$ für alle $n > N$. Daraus folgt mit Dreiecksungleichung $\| w_n \| \leq \| w_n - w \| + \| w \| < 1 + \| w \|$ für $n > N$, also

$$0 \leq |\; b\,(v_n, w_n) - b\,(v, w) \;| \leq C\,(\| w \| + 1) \| v_n - v \| + C \| v \| \| w_n - w \|$$

für $n > N$. Wegen $\| v_n - v \| \rightarrow 0, \| w_n - w \| \rightarrow 0$ konvergiert die rechte Seite der Ungleichung gegen 0, daraus folgt

$$|\; b\,(v_n, w_n) - b\,(v, w) \;| \rightarrow 0.$$