Aufgabe 3

a) Aus
$$\| x \| \leq \| x - y \| + \| y \|$$
folgt
$$\| x \| - \| y \| \leq \| x - y \|,$$
aus
$$\| y \| \leq \| y - x \| + \| x \|$$
folgt
$$\| y \| - \| x \| \leq \| y - x \| = | -1 | \| x - y \| = \| x - y \|,$$
insgesamt
$$\| x - y \| = max \{ \| x \| - \| y \|, \| y \| - \| x \| \} \geq | \| x \| - \| y \| | \, .$$

b) Wenn $\| x \| \geq \| y \|$, dann
$$\| x + y \| + \| x - y \| \geq \| x + y + x - y \| = 2 \| x \| \geq \| x \| + \| y \| \, .$$
Wenn $\| y \| \geq \| x \|$, dann
$$\| x+y \| + \| x-y \| = \| x+y \| + \| y-x \| \geq \| x+y+y-x \| = 2 \| y \| \geq \| x \| + \| y \| \, .$$

c) Für $k = 1$ sind die Ungleichungen trivial. Für $k = 2$ folgt die rechte Ungleichung aus der Dreiecksungleichung und die linke Ungleichung aus a) mit $x = x_1, y = -x_2$.

Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion.

Induktionsschritt von k auf $k + 1$: die rechte Ungleichung folgt aus
$$\| x_1 + \ldots + x_k + x_{k+1} \| \leq \| x_1 + \ldots + x_k \| + \| x_{k+1} \| \leq \| x_1 \| + \ldots + \| x_k \| + \| x_{k+1} \|,$$
wobei die erste Ungleichung aus der Dreiecksungleichung und die zweite aus der Induktionsvoraussetzung folgt. Die linke Ungleichung ergibt sich aus
$$\| x_1 \| - \| x_2 \| - \ldots \| x_{k+1} \| \leq \| x_1 + \ldots + x_k \| - \| x_{k+1} \| \leq \| x_1 + \ldots + x_k + x_{k+1} \|,$$
wobei die erste Ungleichung aus der Induktionsvoraussetzung folgt und die zweite aus a) mit $x = x_1 + \ldots + x_k$ und $y = -x_{k+1}$.

Aufgabe 4

a) f_n ist eine Cauchy-Folge, d.h. für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbf{N}$ mit

$$\| f_n - f_m \| < \epsilon$$

für $n, m > N$.

Sei $x \in [a, b]$. Wegen

$$| f_n(x) - f_m(x) | \leq \| f_n - f_m \|$$

ist $f_n(x)$ ebenfalls eine Cauchy-Folge: für $n, m > N$ ist

$$| f_n(x) - f_m(x) | < \epsilon.$$

Weil $\mathbf{R}$ vollständig ist, konvergiert $f_n(x)$ gegen eine Zahl $f(x)$. Die so definierte Funktion f ist der punktweise Limes von f_n.

Wir zeigen jetzt, dass $\| f_n - f \|_\infty$ gegen 0 konvergiert. Sei $\epsilon > 0$ und $N \in \mathbf{N}$ wie oben. Für $n, m > N$ ist also

$$| f_n(x) - f_m(x) | < \epsilon$$

für alle $x \in [a, b]$. Wegen

$$f(x) = \lim_{m \to \infty} f_m(x)$$

folgt daraus

$$| f_n(x) - f(x) | \leq \epsilon$$

für alle $n > N$ und alle $x \in [a, b]$. Also

$$\| f_n - f \|_\infty \leq \epsilon$$

für $n > N$, woraus

$$\| f_n - f \|_\infty \to 0$$

folgt.

Weil f_n gleichmässig gegen f konvergiert, ist f stetig. Die (beliebig gewählte) Cauchy-Folge f_n konvergiert also in $C([a, b])$, womit die Vollständigkeit von $C([a, b])$ bewiesen ist.

b) Aus $\mid f(x) \mid \geq 0$ folgt $\| f \|_2 \geq 0$.

Aus $\| f \|_2 = 0$, d.h. $\int_a^b \mid f(x) \mid^2 = 0$ folgt dann auch $\int_u^v \mid f(x) \mid^2 = 0$ für alle $a \leq u \leq v \leq b$ und $f \equiv 0$. (Erinnerung: in Aufgabe 2.4. der Klausur vom 26.3. wurde bewiesen: aus g stetig, $g \geq 0$ und $\int_a^b g(x)\, dx = 0$ folgt $g \equiv 0$. Dies wendet man hier an mit $g(x) = \mid f(x) \mid^2$.)

Für $\lambda \in \mathbf{R}$ ist

$$\| \lambda f \|_2 = \left(\int \mid \lambda f(x) \mid^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \mid \lambda \mid \left(\int \mid f(x) \mid dx \right)^{\frac{1}{2}} = \mid \lambda \mid \| f \|_2 .$$

Setze

$$< f, g > = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx,$$

dann ist $< f, f > = \| f \|_2^2$. $< .,. >$ ist offensichtlich bilinear und symmetrisch und, wie oben bewiesen, positiv definit. Man bekommt

$$\| f_1 + f_2 \|_2^2 = < f_1 + f_2, f_1 + f_2 > = \| f_1 \|_2^2 + 2 < f_1, f_2 > + \| f_2 \|_2^2$$

$$\leq \| f_1 \|_2^2 + 2 \| f_1 \|_2 \| f_2 \|_2 + \| f_2 \|_2^2 = (\| f_1 \|_2 + \| f_2 \|_2)^2$$

(wobei wir beim Beweis von $2 < f_1, f_2 > \leq 2 \| f_1 \|_2 \| f_2 \|_2$ die Cauchy-Schwarz-Ungleichung benutzt haben), woraus die Dreiecksungleichung

$$\| f_1 + f_2 \|_2 \leq \| f_1 \|_2^2 + \| f_2 \|_2^2$$

folgt.

c) f_n ist eine Cauchy-Folge, denn

$$\| f_n - f_m \|_2^2 = \int_0^1 | x^n - x^m |^2 \, dx = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2m+1} - \frac{2}{n+m+1} < \epsilon$$

für $n, m > N := \frac{2}{\epsilon}$.

Angenommen, f_n konvergiere in der L^2-Norm gegen eine stetige Funktion f.

Wir bemerken zunächst allgemein: wenn f stetig ist, dann folgt aus $f(x) > c$ immer: es gibt ein $\delta > 0$ mit $f(y) \geq c$ für alle $y \in [x - \delta, x + \delta]$. Begründung: angenommen, es gäbe kein solches $\delta > 0$. Insbesondere für $\delta = \frac{1}{n}$ müsste es dann ein $y_n \in \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)$ mit $f(y_n) < c$ geben. Wegen $y_n \to x$ und Stetigkeit von f ergibt sich der Widerspruch $f(x) \leq c$.

Analog: aus $f(x) < c$ folgt immer: es gibt ein $\delta > 0$ mit $f(y) \leq c$ für alle $y \in [x - \delta, x + \delta]$.

Angenommen also f wäre stetig. Für $x \geq 1$ muss dann $f(x) = 1$ sein. (Angenommen $x_0 \geq 1$ und $f(x_0) \neq 1$. Falls $f(x_0) > 1$, setze $c := \frac{1+f(x_0)}{2} < f(x_0)$. Weil f stetig ist, gibt es ein Intervall $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ mit $f(x) \geq c$ für alle $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Daraus folgt aber

$$\| f_n - f \|_2^2 = \int_0^2 | f_n(x) - f(x) |^2 \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} | 1 - f(x) |^2 \geq 2\delta (c-1)^2$$

für alle $n > N$, im Widerspruch zu $\| f_n - f \|_2 \to 0$. Analog, falls $f(x_0) < 1$, setze $c := \frac{1+f(x_0)}{2} > f(x_0)$, dann gibt es ein Intervall $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ mit $f(x) \leq c$ für alle $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ und man bekommt die selbe Ungleichung wie im ersten Fall.)

Andererseits muss für $x < 1$ $f(x) \leq \frac{1}{2}$ sein. (Angenommen $x_0 < 1$ und $f(x_0) > \frac{1}{2}$. Wegen $f_n(x_0) = x_0^n \to 0$ gibt es ein $N \in \mathbf{N}$ mit $f_n(x_0) < \frac{1}{4}$ für $n > N$. Dann gibt es ein Intervall $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ mit $| f_n(x) | \leq \frac{1}{4}$ und $f(x) \geq \frac{1}{2}$ für alle $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, woraus sich der Widerspruch $\| f_n - f \|_2^2 \geq 2\delta \frac{1}{16}$ für alle $n > N$ ergibt.)

Wegen $f(x) = 1$ für $x \geq 1$ und $f(x) \leq \frac{1}{2}$ für $x < 1$ kann f in $x = 1$ nicht stetig sein. Die Cauchy-Folge (f_n) konvergiert also bzgl. der L^2-norm gegen keine stetige Funktion.