Aufgabe 4

O.B.d.A. $u = 0$. (Sonst ersetze $f(x)$ durch $f(x-u)$.)
a) Fall 1: $f''''(0) > 0$. Weil f'''' stetig ist, gibt es eine Umgebung U von 0, so dass $f''''(x) > 0$ für alle $x \in U$ gilt. Für $x \in U$ mit $x > 0$ folgt dann mit dem Hauptsatz

$$f'''(x) = f'''(0) + \int_0^x f''''(t)\,dt > 0.$$

Für $x \in U$ mit $x < 0$ folgt

$$f'''(x) = f'''(0) - \int_x^0 f''''(t)\,dt < 0.$$

Für $x \in U$ mit $x > 0$ folgt dann mit dem Hauptsatz

$$f''(x) = f''(0) + \int_0^x f'''(t)\,dt > 0.$$

und für $x \in U$ mit $x < 0$ folgt ebenfalls

$$f''(x) = f''(0) - \int_x^0 f'''(t)\,dt > 0.$$

Für $x \in U$ mit $x > 0$ folgt dann mit dem Hauptsatz

$$f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t)\,dt > 0.$$

und für $x \in U$ mit $x < 0$ folgt

$$f'(x) = f'(0) - \int_x^0 f''(t)\,dt < 0.$$

Für $x \in U$ mit $x > 0$ folgt dann mit dem Hauptsatz

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt > 0.$$

und für $x \in U$ mit $x < 0$ folgt ebenfalls

$$f(x) = f(0) - \int_x^0 f'(t)\,dt > 0.$$

Also ist $f(x) > 0$ für alle $x \in U$ mit $x \neq 0$. f hat in 0 ein lokales Minimum.

Fall 2: $f''''(0) < 0$. Setze $g(x) := -f(x)$ für alle x. Dann ist $g''''(0) > 0$ und die ersten drei Ableitungen von g verschwinden. Nach Fall 1 hat g in 0 ein lokales Minimum. Also hat f in 0 ein lokales Maximum.

b) Setze $g(x) := \int_0^x f(t)\,dt$ für alle x. Dann ist $g' = f$, also erfüllt g die Voraussetzungen von a). Sei V eine Umgebung von 0. Nach dem Beweis von a) gibt es eine (eventuell kleinere) Umgebung U von 0, so dass entweder (in Fall 1) $g'(x) > 0$ für alle $x \in U$ mit $x > 0$ und $g'(x) < 0$ für alle $x \in U$ mit $x < 0$ oder (in Fall 2) $g'(x) < 0$ für alle $x \in U$ mit $x > 0$ und $g'(x) > 0$ für alle $x \in U$ mit $x < 0$ gilt. Auf jeden Fall gibt es in V sowohl Punkte mit positiven als auch Punkte mit negativen Funktionswerten. 0 ist also kein lokales Extremum.

c) Wenn m gerade ist, dann hat f in 0 ein lokales Extremum. Wenn m ungerade ist, dann hat f in 0 kein lokales Extremum.

d) Wir beweisen für $m \leq 2k$ durch vollständige Induktion nach k: wenn m gerade ist, dann hat f in 0 ein lokales Minimum (oder ein lokales Maximum). Wenn m ungerade ist, dann gibt es eine Umgebung U mit $f(x) < 0$ für $x \in U$ mit $x < 0$ und $f(x) > 0$ für $x \in U$ mit $x > 0$ (oder umgekehrt).

Induktionsanfang für $k = 2$ in a) und b).

Die Behauptung sei richtig für $m \leq 2k$.

Beweis für $m = 2k + 2$. Setze $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ und $h(x) = \int_0^x g(t)\,dt$. Dann ist $f = h''$. Nach Induktionsvoraussetzung hat h in 0 ein lokales Minimum (oder ein lokales Maximum). Also gibt es eine Umgebung U mit $h(x) > 0$ (oder $h(x) < 0$) für alle $x \in U$. Also ist $g = f'$ auf U streng monoton wachsend (oder streng monoton fallend). Es folgt $f'(x) > 0$ für $x \in U$ mit $x > 0$ und $f'(x) < 00$ für alle $x \in U$ mit $x < 0$ (oder umgekehrt). Mit dem Mittelwertsatz folgt $f(x) > 0$ für alle $x \in U$ mit $x \neq 0$. f hat in 0 ein lokales Minimum.

Beweis für $m = 2k + 1$. Setze $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ und $h(x) = \int_0^x g(t)\,dt$. Dann ist $f = h''$. Nach Induktionsvorausset zung gibt es eine Umgebung U mit $h(x) < 0$ für $x \in U$ mit $x < 0$ und $h(x) > 0$ für $x \in U$ mit $x > 0$ (oder umgekehrt). Mit dem 4. Schritt aus a) folgt, dass g ein lokales Minimum (oder ein lokales Maximum) in 0 hat, dort ist $g(0) = 0$, also $f'(x) > 0$ (oder $f'(x) < 0$) für alle $x \in U, x \neq 0$), also ist f in einer Umgebung von 0 streng monoton wachsend (oder streng monoton fallend).