Aufgabe 4

a) $g(0) = f(0,0) = 0$.

Setze $v = (x_0, y_0)$.

Dann ist

$$f(tv) = t^2 \left(y_0 - tx_0^2\right)\left(y_0 - 2tx_0^2\right).$$

Fall 1a: $x_0 = 0$. Dann ist

$$f(tx_0, ty_0) = t^2 y_0^2 > 0$$

für $t \neq 0$, also ist 0 ein isoliertes Minimum von g.

Fall 1b: $y_0 = 0$. Dann ist

$$f(tx_0, ty_0) = 2t^2 x_0^4 > 0$$

für $t \neq 0$, also ist 0 ein isoliertes Minimum von g.

Fall 2: $x_0 > 0, y_0 > 0$. Für $t < \frac{y_0}{2x_0^2}$ ist dann

$$y_0 - tx_0^2 > 0, y_0 - 2tx_0^2 > 0 \Longrightarrow f(tx_0, ty_0) = t^2\left(y_0 - tx_0^2\right)\left(y_0 - tx_0^2\right) > 0,$$

also ist 0 ein isoliertes Minimum von g.

Fall 3: $x_0 < 0, y_0 < 0$. Für $t > \frac{y_0}{2x_0^2}$ ist dann

$$y_0 - tx_0^2 < 0, y_0 - 2tx_0^2 < 0 \Longrightarrow f(tx_0, ty_0) = t^2\left(y_0 - tx_0^2\right)\left(y_0 - 2tx_0^2\right) > 0,$$

also ist 0 ein isoliertes Minimum von g.

Fall 4: $x_0 > 0, y_0 < 0$. Für $t > \frac{y_0}{2x_0^2}$ ist dann

$$y_0 - tx_0^2 < 0, y_0 - 2tx_0^2 < 0 \Longrightarrow f(tx_0, ty_0) = t^2\left(y_0 - tx_0^2\right)\left(y_0 - 2tx_0^2\right) > 0,$$

also ist 0 ein isoliertes Minimum von g.

Fall 5: $x_0 < 0, y_0 > 0$. Für $t < \frac{y_0}{2x_0^2}$ ist dann

$$y_0 - tx_0^2 > 0, y_0 - 2tx_0^2 > 0 \Longrightarrow f(tx_0, ty_0) = t^2\left(y_0 - tx_0^2\right)\left(y_0 - 2tx_0^2\right) > 0,$$

also ist 0 ein isoliertes Minimum von g.

b) In jeder Umgebung von $(0,0)$ gibt es Punkte der Form

$$(x, y) = \left(\frac{1}{n}, \frac{3}{2n^2}\right)$$

mit $n > 1$.

In diesen Punkten ist

$$y - x^2 > 0, y - 2x^2 < 0,$$

also $f(x,y) < 0$.

Aufgabe 5

Beweis durch Induktion:

Induktionsanfang für $k = 0$:

$$\phi(t) = \phi(0) + \int_0^t \phi'(s)\, ds$$

gilt nach dem Hauptsatz.

Nach Produktregel ist

$$\frac{d}{ds}\left(\phi^{(k+1)}(s)(t-s)^{k+1}\right) = \phi^{(k+2)}(s)(t-s)^{k+1} + (-1)^{k+1}(k+1)\phi^{(k+1)}(s)(t-s)^{k},$$

nach dem Hauptsatz also

$$\int_0^t \phi^{(k+2)}(s)(t-s)^{k+1} + (-1)(k+1)\phi^{(k+1)}(s)(t-s)^{k}\, ds$$
$$= \phi^{(k+1)}(s)(t-s)^{k+1} \Big|_0^t = -\phi^{(k+1)}(0)\, t^{k+1}.$$

Damit führen wir jetzt den Beweis des Induktionsschritts. Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$\phi(t) = \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m!}\phi^{(m)}(0)\, t^m + \frac{1}{k!}\int_0^t \phi^{k+1}(s)(t-s)^k\, ds.$$

Einsetzen der oben bewiesenen Gleichung ergibt

$$\phi(t) = \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m!}\phi^{(m)}(0)\, t^m + \frac{1}{k!}\frac{1}{(-1)(k+1)}\left(-\phi^{(k+1)}(0)\, t^{k+1} - \int_0^t \phi^{(k+2)}(s)(t-s)^{k+1}\, ds\right)$$
$$= \sum_{m=0}^{k+1} \frac{1}{m!}\phi^{(m)}(0)\, t^m + \frac{1}{(k+1)!}\int_0^t \phi^{k+2}(s)(t-s)^{k+1}\, ds.$$