Aufgabe 4

a) Wir definieren $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ durch

$$g(x) = x^t A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

wobei $a_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$ die Einträge der Matrix A sind, und $h : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ durch

$$h(y) = \frac{1}{y}.$$

Dann ist $f = h \circ g \mid_{\mathbf{R}^n \setminus N}$.

Weil g stetig ist, ist

$$\mathbf{R}^n \setminus N = g^{-1}\left((-\infty, 0) \cup (0, \infty)\right)$$

offen.

g ist eine bilineare Abbildung, also nach Aufgabe 9.5 differenzierbar mit

$$Dg(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} (a_{1j} + a_{j1}) x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} (a_{nj} + a_{jn}) x_j \right).$$

h ist differenzierbar mit

$$Dh(y) = -\frac{1}{y^2}.$$

Anwendung der Kettenregel ergibt Differenzierbarkeit von f und

$$Df(x) = -\frac{1}{(x^t A x)^2} \left(\sum_{j=1}^{n} (a_{1j} + a_{j1}) x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} (a_{nj} + a_{jn}) x_j \right).$$

b)

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{g_1(x+h)}^{g_2(x+h)} f(x+h,y)\,dy - \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{g_1(x)}^{g_1(x+h)} f(x+h,y)\,dy + \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{g_2(x)}^{g_2(x+h)} f(x+h,y)\,dy.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es $\xi_h \in (g_1(x), g_1(x+h))$ mit

$$\int_{g_1(x)}^{g_1(x+h)} f(x+h,y)\,dy = f(x+h,\xi_h)\,(g_1(x+h)-g_1(x))$$

und $\eta_h \in (g_2(x), g_2(x+h))$ mit

$$\int_{g_2(x)}^{g_2(x+h)} f(x+h,y)\,dy = f(x+h,\eta_h)\,(g_2(x+h)-g_2(x)),$$

wegen $\lim_{h\to 0} f(x+h,\xi_h) = f(x,g_1(x))$ und $\lim_{h\to 0} f(x+h,\eta_h) = f(x,g_2(x))$ also

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy =$$

$$\lim_{h\to 0}\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}dy - \lim_{h\to 0}\frac{g_1(x+h)-g_1(x)}{h} f(x+h,\xi_h) + \lim_{h\to 0}\frac{g_2(x+h)-g_2(x)}{h} f(x+h,\eta_h)$$

$$= \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy - g_1'(x)\,f(x,g_1(x)) + g_2'(x)\,f(x,g_2(x)).$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass $\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$ für $h \to 0$ gleichmässig gegen $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ konvergiert, woraus $\lim_{h\to 0}\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy$ folgt. Diese gleichmässige Konvergenz beweist man wie folgt:

Nach Definition ist $\mid \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \mid = \mid \lambda_{(x,y)}(h) \mid$, wobei $\lambda_{(x,y)}(h)$ stetig in $h=0$ und $\lambda_{(x,y)}(0)=0$. Weil $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ nach Voraussetzung stetig ist, hängt $\lambda_{(x,y)}(h)$ auch stetig von (x,y) ab. Sei K eine kompakte Umgebung von $\{x\}\times[g_1(x), g_2(x+h)]$. Nach Aufgabe 5.4.b) ist $sup_{(x,y)\in K}\lambda_{(x,y)}(h)$ stetig in h, insbesondere $\lim_{h\to 0} sup_{(x,y)\in K}\lambda_{(x,y)}(h) = 0$. Daraus folgt $\parallel \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \parallel_\infty \to 0$ auf K, also gleichmässige Konvergenz.

Aufgabe 5

Die Gradienten

$$grad\ f_1(x,y) = \left(2x, 4y^3\right)$$
$$grad\ f_2(x,y) = (2x, 0)$$
$$grad\ f_3(x,y) = \left(2x, 3y^2\right)$$

sind in $(x,y) = (0,0)$ alle gleich $(0,0)$. Die Hesse-Matrizen

$$Hess\ f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$Hess\ f_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Hess\ f_3(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

sind in $(x,y) = (0,0)$ alle gleich $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Diese Matrix ist positiv semidefinit, denn für alle $v = (v_1, v_2) \in \mathbf{R}^2$ ist

$$v^t Av = 2v_1^2 \geq 0.$$

$(0,0)$ ist ein isoliertes globales Minimum von f_1, denn $f_1(0,0) = 0$ und $f_1(x,y) > 0$ für alle $(x,y) \neq (0,0)$.

$(0,0)$ ist ein globales Minimum von f_2, denn $f_2(0,0) = 0$ und $f_2(x,y) \geq 0$ für alle (x,y). Es ist kein isoliertes Minimum, denn in jeder Umgebung gibt es Punkte der Form $(0,y)$ mit $f_2(0,y) = 0$.

$(0,0)$ ist kein lokales Extremum von f_3, denn $f_3(0,0) = 0$, aber in jeder Umgebung gibt es sowohl Punkte der Form $(0,y)$ mit $y > 0$ als Punkte der Form $(0,y)$ mit $y < 0$, für diese Punkte ist dann $f_3(y) > 0$ bzw. $f_3(0,y) < 0$.