Aufgabe 3a

- $d_m(x,y) \geq min\{1,0\} \geq 0$ und $d_m(x,y) = 0 \Longleftrightarrow d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
- $d_m(x,y) = min\{1, d(x,y)\} = min\{1, d(y,x)\} = d_m(y,x)$
- Falls $d(x,y) \geq 1$ oder $d(y,z) \geq 1$ ist $d_m(x,y) = 1$ oder $d_m(y,z) = 1$, also $d_m(x,z) \leq 1 \leq d_m(x,y) + d_m(y,z)$.

  Falls $d(x,y) < 1$ und $d(y,z) < 1$ ist $d_m(x,z) \leq d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) = d_m(x,y) + d_m(y,z)$

Aufgabe 3b

- Weil ρ monoton wächst, ist $d_\rho(x,y) \geq \rho(0) = 0$. Nach der ersten Bedingung ist $d_\rho(x,y) = 0 \Longleftrightarrow d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
- $d_\rho(x,y) = \rho(d(x,y)) = \rho(d(y,x)) = d_\rho(y,x)$
- Weil ρ monoton wächst, ist $\rho(d(x,z)) \leq \rho(d(x,y) + d(y,z))$.

  Weil ρ' monoton fällt und $\rho(0) = 0$, ist $\rho(d(x,y) + d(y,z)) \leq \rho(d(x,y)) + \rho(d(y,z))$.

Im letzten Schritt haben wir benutzt: aus $0 \leq a \leq b$ folgt $\rho(a+b) \leq \rho(a) + \rho(b)$.

Beweis dieser Behauptung: Nach dem Mittelwertsatz gibt es $\xi_1 \in [0,a], \xi_2 \in [b, a+b]$ mit $\rho'(\xi_1) = \frac{\rho(a)}{a}$ und $\rho'(\xi_2) = \frac{\rho(a+b)-\rho(b)}{a}$. Weil ρ' monoton fällt, ist $\rho'(\xi_1) \geq \rho'(\xi_2)$. Daraus ergibt sich $\rho(a) \geq \rho(a+b) - \rho(b)$.

Aufgabe 3c

Wegen $0 \leq d_m(x,y) \leq d(x,y)$ folgt aus $d(x_n,x) \to 0$ auch $d_m(x_n,x) \to 0$.

Umgekehrt, sei $d_m(x_n,x) \to 0$, dann gibt es ein N_0 mit $d_m(x_n,x) < 1$ für $n > N_0$. Insbesondere ist $d_m(x_n,x) = d(x_n,x)$ für $n > N_0$. Also auch $d(x_n,x) \to 0$.

Weil ρ stetig ist, folgt aus $d(x_n,x) \to 0$ auch $d_\rho(x_n,x) \to 0$.

Umgekehrt, sei $d_\rho(x_n,x) \to 0$. Angenommen, $d(x_n,x)$ würde nicht gegen 0 konvergieren, dann gäbe es ein $\epsilon > 0$ mit $d(x_n,x) > \epsilon$ für unendlich viele n. Weil ρ monoton wächst, folgt $\rho(d(x_n,x)) \geq \rho(\epsilon)$ für unendliche viele n. Wegen $\rho(\epsilon) > 0$ widerspricht das der Voraussetzung $d_\rho(x_n,x) \to 0$.

Aufgabe 4

Direkt aus der Definition ergibt sich $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ sowie $d(x,y) = d(y,x)$.

Offensichtlich gilt die Dreiecksungleichung für $x = y$ oder $y = z$.

Sei $x \neq y \neq z$, also $d(x,y) = 2^{-n}$ und $d(y,z) = 2^{-m}$, o.B.d.A. $n \leq m$. Dann sind $x - y$ und $y - z$ durch 2^n teilbar, also ist auch $x - z = (x-y) + (y-z)$ durch 2^n teilbar, also $d(x,z) \leq 2^{-n} < d(x,y) + d(y,z)$.