Mathematisches Institut
Universität iEichstätt
Dr. Thilo Kuessner 17. April 2009

Integrationstheorie, WS 2020/21, Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1:

Sei X eine überabzählbare Menge. Dann bilden diejenigen Mengen, für die entweder A oder $X \setminus A$ abzählbar ist, eine σ-Algebra. Sei $\mu(A) = 0$, wenn A abzählbar, und $\mu(A) = 1$, wenn $X \setminus A$ abzählbar. μ ist ein Maß. Was sind die meßbaren Funktionen?

Aufgabe 2:

Sei $\mu(X) < \infty$. Eine Folge beschränkter, meßbarer Funktionen $f_N : X \to [0, \infty)$ konvergiere gleichmäßig gegen $f : X \to [0, \infty)$. Beweisen Sie

$$\int_f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Zeigen Sie, dass diese Gleichheit für $\mu(X) = \infty$ nicht immer gilt.

Aufgabe 3:

Sei $f_n : X \to \mathbb{R}$ eine Folge messbarer Funktionen. Wir definieren eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \lim_{n\to\infty} f_n(x) & fallsderGrenzwertexistiert \\ 0 & sonst \end{array} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass f messbar ist.

Aufgabe 4:

Ist die Ableitung einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ immer meßbar?
Abgabe 28. April 2009, 12:15 Uhr.