Mathematisches Institut
Universität Eichstätt
Dr. Thilo Kuessner 20. November 2020

Integrationstheorie, WS 2020/21, Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1:

Wir betrachten auf $\mathbb{R}$ die Standardmetrik $d(x,y) = |x-y|$ und die durch diese bestimmte Topologie. Zeigen Sie:
a) das halboffene Intervall $[1,2)$ ist weder offen noch abgeschlossen.
b) das Intervall $[1,\infty)$ ist abgeschlossen, aber nicht offen.

Erinnerung: eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen, wenn ihr Komplement $\mathbb{R} \setminus A$ offen ist.

Aufgabe 2:

Auf dem $\mathbb{R}^2$ betrachten wir die Standardmetrik $d(x,y) = \sqrt{|x_1-y_1|^2 + |x_2-y_2|^2}$.
Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Teilmengen offen sind:
a) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \neq 0\right\}$
b) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \neq x\right\}$

Aufgabe 3:

Auf dem $\mathbb{R}^n$ betrachten wir die Standardmetrik

$$d_1(x,y) = \sqrt{|x_1-y_1|^2 + \ldots + |x_n-y_n|^2}$$

und die Metrik

$$d_2(x,y) = |x_1-y_1| + \ldots + |x_n-y_n|.$$

Beweisen Sie die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{n}} d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq d_2(x,y)$$

für beliebige $x,y \in \mathbb{R}^n$.

Hinweis: für die erste Ungleichung können Sie die Abschätzung $2a_ia_j \leq a_i^2 + a_j^2$ verwenden, die sich für beliebige a_i, a_j aus $(a_i-a_j)^2 \geq 0$ ergibt.

Aufgabe 4:

Wir betrachten erneut die Metriken d_1 und d_2 aud Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass eine Menge genau dann eine für die Metrik d_1 offene Menge ist, wenn sie eine für die Metrik d_2 offene Menge ist.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 3.

Abgabe 27. November 2020, 23:59 Uhr.