Mathematisches Institut
Universität Eichstätt
Dr. Thilo Kuessner 12. November 2020

Integrationstheorie, WS 2020/21, Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1:

Sei X eine überabzählbare Menge.

Zeigen Sie, dass diejenigen Teilmengen $A \subset X$, für die entweder A oder $X \setminus A$ abzählbar ist, eine σ-Algebra bilden.

Aufgabe 2:

Sei $X = \cup_{i \in I} A_i$ eine disjunkte Zerlegung einer Menge X. (Die Indizes stammen aus einer beliebigen Menge I.)

Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} = \{\cup_{j \in J} A_j \colon J \subset I\}$ eine σ-Algebra ist.

Aufgabe 3:

Auf B^{n-1} sei eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ definiert.
Wir bezeichnen $S^{n-1} = \{y \in \mathbb{R}^n \colon \|y\| = 1\}$ und $B^{n-1} = \left\{x \in \mathbb{R}^{n-1} \colon \|x\| \leq 1\right\}$.

Für $A \subset S^{n-1}$ definiere

$$A^{\pm} = \left\{x \in B^{n-1} \colon (x, \pm\sqrt{1 - \|x\|^2}) \in A\right\}.$$

Beweisen Sie, dass

$$\left\{A \subset S^{n-1} \colon A^+ \in \mathcal{A} \text{ und } A^- \in \mathcal{A}\right\}$$

eine σ-Algebra ist.

Aufgabe 4:

Wieviele unterschiedliche σ-Algebren gibt es auf der dreielementigen Menge $\{1, 2, 3\}$?

Abgabe 20. November 2020, 23:00 Uhr.