Mathematisches Institut
Universität Eichstätt
Dr. Thilo Kuessner 2. November 2020

Integrationstheorie, WS 2020/21, Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1:

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ das rechtwinklige Dreieck mit Ecken $(0,0)$, $(a,0)$ und $(0,b)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass D Jordan-meßbar ist und berechnen Sie $m(D)$.

Aufgabe 2:

Sei
$$A = \left\{ \frac{2p-1}{2^q} : p, q \in \mathbb{N}, 2p-1 \leq 2^q \right\}.$$
Zeigen Sie, dass
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sharp (A \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z})$$
nicht existiert. Dabei bedeutet $\frac{1}{n}\mathbb{Z}$ die Menge aller Zahlen $\frac{a}{n}$ mit $a \in \mathbb{Z}$.

Hinweis: Beweisen Sie
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sharp (A \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z}) = 0, \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sharp (A \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z}) = 1.$$

Aufgabe 3:

Beweisen Sie, dass
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sharp (E \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z})$$
für $E = \mathbb{Q}$ den Wert 1, aber für $E = \mathbb{Q} + \sqrt{2}$ den Wert 0 annimmt. Dabei bedeutet $\mathbb{Q} + \sqrt{2}$ die Menge aller Zahlen $q + \sqrt{2}$ mit $q \in \mathbb{Q}$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{Q} + \sqrt{2}) = \emptyset$.

Aufgabe 4:

Seien $E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}, E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ Elementarmengen. Zeigen Sie, dass

$E_1 \times E_2 := \left\{ (x_1, \ldots, x_{d_1}, y_1 \ldots, y_{d_2}) \in \mathbb{R}^{d_1+d_2} : (x_1, \ldots, x_{d_1}) \in E_1, (y_1, \ldots, y_{d_2}) \in E_2 \right\} \subset \mathbb{R}^{d_1+d_2}$

eine Elementarmenge ist und dass $m(E_1 \times E_2) = m(E_1) m(E_2)$ gilt.

Abgabe 13. November 2020, 23:00 Uhr.