Übungen zu MP III (Analysis III für Physiker) Blatt 9- Lösungen

Aufgabe 1.
Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion. Für $n=0$ setzen wir die Definition der Γ-Funktion ein. Sei also $\Gamma^{(n-1)}(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}(\ln t)^{n-1}\,dt$ bereits gezeigt.
$f(t,x)=e^{-t}t^{x-1}(\ln t)^{n-1}$ ist für festes t differenzierbar in x, die Ableitung ist $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)=e^{-t}t^{x-1}(\ln t)^n$. Um die Voraussetzungen von Satz II.21, der die Vertauschbarkeit von Integral und Differentiation gewährleistete, zu erfüllen, müssen wir $\frac{\partial f}{\partial x}$ durch eine integrierbare Funktion abschätzen. Eine solche Majorisierung ist offensichtlich nicht möglich für alle x gleichzeitig (weil $\lim_{x\to\infty}\frac{\partial f}{\partial x}=\infty$), aber, weil Differenzierbarkeit eine lokale Eigenschaft ist, genügt es, eine solche Majorante in einer Umgebung von x zu finden.
Sei also $x\in\mathbb{R}$ fest und $[a,b]$ ein beliebiges *kompaktes* Intervall mit $a<x<b$. Wir behaupten, dass $F(t):=e^{-t}\mid(\ln t)^n\mid\left(t^{a-1}+t^{b-1}\right)$ eine integrierbare Majorante für $e^{-t}t^{x-1}(\ln t)^{n-1}$ ist.
Nämlich, es gilt für $t\geq 1$ die Ungleichung $t^{x-1}\leq t^{b-1}$ bzw. für $0\leq t\leq 1$ die Ungleichung $t^{x-1}\leq t^{a-1}$, insgesamt also $\mid e^{-t}t^{x-1}(\ln t)^n\mid\leq F(t)$.
Wie wir aus der Vorlesung wissen, existiert $\int_0^\infty e^{-t}t^{a+b-1+n}dt=\Gamma(a+b+n)$. Auf $[1,\infty)$ gilt $(\ln t)^n\leq t^n$, also ist $\int_1^\infty F(t)\leq\int_1^\infty e^{-t}t^n\left(t^{a-1}+t^{b-1}\right)\leq\int_0^\infty e^{-t}\left(t^{a-1+n}+t^{b-1+n}\right)=\Gamma(a-1+n)+\Gamma(b-1+n)$, d.h., F ist auf $[1,\infty)$ integrierbar.
Es gilt $\lim_{t\to 0}\mid(\ln t)^n\mid\left(t^{a-1}+t^{b-1}\right)=0$, wie man etwa mit der L'Hospitalschen Regel zeigt. Also ist $F(t)\leq\mid(\ln t)^n\mid\left(t^{a-1}+t^{b-1}\right)$ auf dem kompakten Intervall $[0,1]$ beschränkt und damit auf $[0,1]$ integrierbar.
Wir haben $\mid e^{-t}t^{x-1}(\ln t)^{n-1}\mid$ also durch eine integrierbare Funktion majorisiert, können deshalb Satz II.21. anwenden und erhalten

$$\Gamma^{(n)}(x)=\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty f(t,x)\,dt=\int_0^\infty\frac{\partial f}{\partial x}dt=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}(\ln t)^n\,dt$$

für alle $x\in[a,b]$. Weil x und $[a,b]$ beliebig gewählt waren, folgt die Behauptung.

Aufgabe 2.
a) Sei $\mu(N)=0$ und $f(x)=g(x)$ für alle $x\notin N$. Sei $y\in\mathbb{R}^n$ beliebig. Für jedes $n\in\mathbb{N}$ existiert $x_n\in B\left(y,\frac{1}{n}\right)$ mit $x_n\notin N$, denn sonst wäre $N\supset B\left(y,\frac{1}{n}\right)$ und dadurch $\mu(N)>0$. Es gilt also $f(x_n)=g(x_n)$ und $x_n\to y$. Wegen Stetigkeit folgt $f(y)=g(y)$. Weil $y\in\mathbb{R}^n$ beliebig war, folgt die Behauptung.
b) Es ist $\widehat{f-g}=\hat{f}-\hat{g}=0$, insbesondere $\widehat{f-g}\in\mathcal{L}^1$. Deshalb können wir die Umkehrformel anwenden und bekommen $f-g=0$ fast überall. Mit a) folgt $f=g$.

Aufgabe 3.
a) $\hat{f}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}e^{-ix\xi}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-x}\left(e^{-ix\xi}+e^{ix\xi}\right)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-x-ix\xi}}{-1-i\xi}+\frac{e^{-x+ix\xi}}{-1+i\xi}\right)\Big|_0^\infty=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\xi^2}$.

b) $\int_{-\infty}^\infty F_a(x)\,dx=\frac{1}{\pi a}\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}dx=\frac{1}{\pi a}\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{1+y^2}a\,dy=\frac{1}{\pi}\arctan y\,\Big|_{-\infty}^\infty=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{2}\right)=1$.
Sei $g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-a|x|}$. Dann ist

$$\hat{g}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)=\frac{1}{a\pi}\frac{a^2}{a^2+\xi^2}=F_a(\xi).$$

Andererseits ist

$$\hat{F_a}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty F_a(x)\,e^{-ix\xi}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty\hat{g}(x)\,e^{-ix\xi}dx=\int_{-\infty}^\infty\hat{g}(-x)\,e^{ix\xi}dx=\int_{-\infty}^\infty\hat{g}(x)\,e^{ix\xi}dx,$$

wobei wir $\hat{g}(-x)=\hat{g}(x)$ benutzt haben. Nach der Umkehrformel gilt $\hat{F_a}(\xi)=g(\xi)$ fast überall. Weil $\hat{F_a}$ und g stetig sind, folgt $\hat{F_a}=g$.

c) $f(x,y):=F_a(x)\,F_b(y-x)$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz II.19, also ist
$F_a*F_b(y)=\int_{-\infty}^\infty f(x,y)\,dx$ stetig in y.

d) Es ist $\widehat{F_a*F_b}(\xi)=\sqrt{2\pi}\hat{F_a}(\xi)\,\hat{F_b}(\xi)=\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-a|\xi|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-b|\xi|}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(a+b)|\xi|}=\widehat{F_{a+b}}(\xi)$. Weil F_a*F_b und F_{a+b} stetig sind, folgt mit Aufgabe 2b): $F_a*F_b=F_{a+b}$.