Übungen zu MPIII, K.Ziegler, T.Kuessner, Blatt 8- Lösungen

Aufgabe 1. a) Die Folge $\left(\sum_{k=-n}^{n} \mid c_k \mid^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nach Voraussetzung, ist also eine Cauchy-Folge. Für alle $\epsilon > 0$ existiert also $N \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{n\leq|k|\leq m} \mid c_k \mid^2 < \epsilon$ für alle $m > n > N$ gilt. Damit gilt dann auch

$$\| \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx} - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \|_2^2 = \| \sum_{n\leq|k|\leq m} c_k e^{ikx} \|_2^2 = \sum_{n\leq|k|\leq m} \| c_k e^{ikx} \|_2 + 2 \sum_{n\leq|k|,|l|\leq m, k\neq l} < c_k e^{ikx}, c_l e^{ilx} >_2$$

$$= \sum_{n\leq|k|\leq m} \| c_k e^{ikx} \|_2 = \sum_{n\leq|k|\leq m} \mid c_k \mid^2 \| e^{ikx} \|_2 = \sum_{n\leq|k|\leq m} \mid c_k \mid^2 < \epsilon,$$

wobei wir $\| e^{ikx} \|_2 = 1$ und $< c_k e^{ikx}, c_l e^{ilx} >_2 = c_k \overline{c_l} < e^{ikx}, e^{ilx} >_2 = 0$ benutzt haben. Also ist $\left(\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^2[0,2\pi]$. Nach Anwesenheits-Aufgabe 1a) ist $\mathcal{L}^2[0,2\pi]$ vollständig, also konvergiert $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$.

b) Für alle ϵ gibt es $N \in \mathbb{N}$ so dass $\| g_1 - \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} \|_2 < \epsilon$ und $\| g_2 - \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} \|_2 < \epsilon$ gilt, nach der Minkowski-Ungleichung also $\| g_1 - g_2 \|_2 < 2\epsilon$. Da man $\epsilon > 0$ beliebig wählen kann, folgt $\| g_1 - g_2 \|_2 = 0$. Nach Satz II.9 heißt dies, dass $\mid g_1 - g_2 \mid^2 = 0$ fast überall, also $g_1 = g_2$ fast überall.

c) Der k-te Fourierkoeffizient von g ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\, e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{ilx} e^{-ikx} dx.$$

Es ist für alle $N \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{l=-N}^{N} c_l e^{ilx} e^{-ikx} dx = c_k$$

weil $\int_0^{2\pi} e^{i(l-k)x} dx = 2\pi\delta_{lk}$ (und weil die Summe endlich) ist.
Sei $g_N := \sum_{l=-N}^{N} c_l e^{ilx}$ für $N \in \mathbb{N}$. Wir wissen, dass g_N in $\mathcal{L}^2[0,2\pi]$ gegen g konvergiert, d.h., $\lim_{N\to\infty} \| g_N - g \|_2 = 0$. Ausserdem haben wir gerade $< e^{ikx}, g_N >_2 = c_k$ gezeigt (für $N > k$). Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ergibt

$$< e^{ikx}, g >_2 - < e^{ikx}, g_N >_2 = < e^{ikx}, g - g_N >_2 \leq \| e^{ikx} \|_2 \| g - g_N \|_2 = \| g - g_N \|_2 .$$

Mit $\lim_{N\to\infty} \| g_N - g \|_2 = 0$ folgt also $< e^{ikx}, g > = \lim_{N\to\infty} < e^{ikx}, g_N >_2 = c_k$, d.h., der k-te Fourierkoeffizient von g ist c_k.

Aufgabe 2. a) Seien $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (d_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2$. Für beliebige komplexe Zahlen c_k, d_k gilt

$$\mid c_k + d_k \mid^2 = (c_k + d_k)\left(\overline{c_k + d_k}\right) = \mid c_k \mid^2 + c_k\overline{d_k} + d_k\overline{c_k} + \mid d_k \mid^2 .$$

Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung hat man

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k\overline{d_k} \leq \left(\sum_{k=-N}^{N} \mid c_k \mid^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=-N}^{N} \mid d_k \mid^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

und dieselbe Abschätzung auch für $\sum_{k=-N}^{N} d_k\overline{c_k}$. Damit erhalten wir

$$\sum_{k=-N}^{N} \mid c_k + d_k \mid^2 \leq \sum_{k=-N}^{N} \mid c_k \mid^2 + \mid d_k \mid^2 + 2\left(\sum_{k=-N}^{N} \mid c_k \mid^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=-N}^{N} \mid d_k \mid^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\left(\sum_{k=-N}^{N} \mid c_k \mid^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=-N}^{N} \mid d_k \mid^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \leq \left(\| c \|_{l^2} + \| d \|_{l^2}\right)^2 .$$

Also existiert der Grenzwert $\| c + d \|_{l^2} = \lim N \to \infty \left(\sum_{k=-N}^{N} \mid c_k + d_k \mid^2\right)^{\frac{1}{2}}$ und erfüllt die Ungleichung $\| c + d \|_{l^2} \leq \| c \|_{l^2} + \| d \|_{l^2}$. Assoziativität der Addition ist offensichtlich. Ausserdem gilt, für $\lambda \in \mathbb{C}$, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mid \lambda c_k \mid^2 = \mid \lambda \mid^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mid c_k \mid^2$. Also ist l^2 ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

b) Sei $f \in \mathcal{L}^2[0,2\pi]$. Nach Aufgabe 2b) ist $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mid c_k \mid^2 = \| f \|_2^2 < \infty$, also ist $i(f) \in l^2$. Wenn $f = g$ fast überall, dann gilt $f(x)\, e^{ikx} = g(x)\, e^{ikx}$ ausserhalb einer Nullmenge, also $\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{ikx} dx = \int_0^{2\pi} g(x)\, e^{ikx} dx$

und damit $i(f) = i(g)$. Deshalb ist i wohldefiniert auf $L^2[0,2\pi] = \mathcal{L}[0,2\pi]/\sim$. Es ist offensichtlich $i(f+g) = i(f) + i(g)$ und $i(\lambda f) = \lambda i(f)$, also ist i ein Homomorphismus.
Zu $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2$ definieren wir

$$j\left((c_k)_{k\in\mathbb{Z}}\right) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

Nach Aufgabe 1a) existiert diese Summe in $\mathcal{L}^2[0,2\pi]$ und nach Aufgabe 1b) hat sie ein eindeutiges Bild in $L^2[0,2\pi]$. Also definiert j eine Abbildung

$$j : l^2 \to L^2[0,2\pi],$$

die offensichtlich ein Homomorphismus ist.
Für $f \in L^2[0,2\pi]$ ist $i(f) \in l^2$ gerade die Folge der Fourier-Koeffizienten von f. Wegen Aufgabe 1c) folgt daraus, dass

$$i\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}\right) = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$$

für alle $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2$ gilt. Also ist $ij = id_{l^2}$.
Für $f \in L^2[0,2\pi]$ gilt nach Anwesenheitsaufgabe 2b), dass

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = j(i(f))$$

ist. Also ist $ji = id_{L^2[0,2\pi]}$. Damit sind i und j zueinander inverse Vektorraum-Isomorphismen.

c) Aus dem Beweis von a) wissen wir, dass $\| c+d \|_{l^2} \leq \| c \|_{l^2} + \| d \|_{l^2}$ und $\| \lambda c \|_{l^2} = |\lambda| \| c \|_{l^2}$ für $c, d \in l^2$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ist. Ausserdem gilt $\| c \|_{l^2} \geq 0$ und aus $\| c \|_{l^2} = 0$ folgt offensichtlich $c_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Also ist $\| . \|_{l^2}$ eine Norm.
Seien $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$ die Fourier-Koeffizienten von f. Nach der Parseval-Gleichung (Anwesenheits-Aufgabe 2b) gilt $\| f \|^2_{L^2[0,2\pi]} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} | c_k |^2$. Damit ist

$$\| i(f) \|^2_{l^2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{ikx} dx \right|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} | c_k |^2 = \| f \|^2_{L^2[0,2\pi]}.$$

d) Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left((c_{n,k})_{k\in\mathbb{Z}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset l^2$ eine Cauchy-Folge in l^2, d.h. für alle $\epsilon > 0$ existiert $N \in \mathbb{N}$ so dass

$$\| c_n - c_m \|_{l^2} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} | c_{n,k} - c_{m,k} |^2\right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon$$

für alle $m > n > N$ gilt. Sei

$$f_n := j(c_n) \in L^2[0,2\pi]$$

mit j definiert in b). Wegen b) und c) ist

$$\| c_n \|_{l^2} = \| i(j(c_n)) \|_{l^2} = \| j(c_n) \|_{L^2[0,2\pi]} = \| f_n \|_{L^2[0,2\pi]}.$$

Insbesondere gilt also auch $\| f_n - f_m \|_{L^2[0,2\pi]} < \epsilon$ für alle $n > m > N$, d.h. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $L^2[0,2\pi]$. Aus Anwesenheitsaufgabe 1a) folgt, dass $L^2[0,2\pi]$ vollständig ist. Also konvergiert f_n gegen $f \in L^2[0,2\pi]$, d.h. für alle ϵ' existiert N' so dass

$$\| f_n - f \|_{L^2[0,2\pi]} < \epsilon'$$

für alle $n > N'$. Wegen c) folgt daraus $\| i(f_n) - i(f) \|_{l^2} < \epsilon'$ für alle $n > N'$, also konvergiert $i(f_n)$ gegen $i(f)$ in l^2. Es gilt aber $i(f_n) = i(j(c_n)) = c_n$, d.h. c_n konvergiert gegen $i(f)$. Damit haben wir gezeigt, dass jede Cauchyfolge in l^2 konvergiert.

<u>Aufgabe 3.</u> Nach Definition von $\mathcal{L}^p$ ist $f \in \mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^1_{loc}$, also ist f über jede kompakte Menge integrierbar. Sei $q = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}$, d.h., $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt nach der Hölder-Ungleichung

$$\int_K | f(x) g(x) | dx \leq \| f \|_p \| g \|_q$$

für jedes $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$.
Betrachten wir $g = 1_K$, dann gilt sicher $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$ und

$$\| g \|_q = \left(\int_K 1dx\right)^{\frac{1}{q}} = Vol(K)^{1-\frac{1}{p}},$$

woraus die Behauptung folgt.