Übungen zu MPIII, Blatt 7- Lösungen

Aufgabe 1.

Wegen $A \times B \subset A \times \mathbb{R}^m$ genügt es (nach Satz 8a) zu zeigen, dass $A \times \mathbb{R}^m$ eine Nullmenge ist. Weil $\mathbb{R}^m$ abzählbare Vereinigung kompakter Mengen ist, genügt es (nach Satz 8b) zu zeigen, dass $A \times K$ eine Nullmenge ist falls $K \subset \mathbb{R}^m$ kompakt.
Es gilt $1_{A\times K}(x,y) = 1_A(x)\, 1_K(y)$. Weil 1_A und 1_K integrierbar und beschränkt sind, ist, nach Satz 6, auch $1_A 1_K$ integrierbar. Deshalb können wir den Satz von Fubini anwenden und erhalten:

$$Vol(A \times K) = \int_{\mathbb{R}^{m+k}} 1_{A\times K}(x,y)\, d^k x d^m y = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^k} 1_A(x)\, 1_K(y)\, d^k x \right) d^m y$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} 1_K(y) \left(\int_{\mathbb{R}^k} 1_A(x)\, d^k x \right) d^m y = \int_{\mathbb{R}^m} 1_K(y)\, Vol(A)\, d^m y = \int_{\mathbb{R}^m} 1_K(y)\, 0 d^m y = 0.$$

Aufgabe 2.

$f_k(x)$ konvergiert fast überall (nämlich für $x \neq \frac{\pi}{2}$) gegen $f(x) = 0$.
Es gilt natürlich $\mid f_k \mid \leq 1_{[0,\pi]}$ auf $[0,\pi]$ und $\| 1_{[0,\pi]} \|_1 = \pi < \infty$. Damit sind die Voraussetzungen des Satzes von der majorisierten Konvergenz erfüllt und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\pi \sin^k(x)\, dx = \int_0^\pi \lim_{k\to\infty} \sin^k(x)\, dx = 0.$$

Aufgabe 3.

Sei $R := 2\, max\{\| a_1 \|, \ldots, \| a_m \|\}$. Wir behaupten: aus $\| y \| \geq R$ folgt $\Pi_{i=1}^m \frac{1}{\|y-a_i\|} \leq \frac{2^m}{\|y\|^m}$. Tatsächlich gilt:

$$\| y \| \geq \| 2 \| a_i \| \Longrightarrow \| y - a_i \| \geq \| y \| - \| a_i \| \geq \| a_i \| \Longrightarrow \| y \| \leq \| a_i \| + \| y - a_i \| \leq 2 \| y - a_i \| \Longrightarrow \frac{1}{\| y - a_i \|} \leq \frac{2}{\| y \|}.$$

Wenn also $\| y \| \geq 2 \| a_i \|$ für $i = 1, \ldots, m$, so ist, wie behauptet, $\Pi_{i=1}^m \frac{1}{\|y-a_i\|} \leq \frac{2^m}{\|y\|^m}$.
Wegen $m > n$ ist nach Beispiel 6 (Vorlesung) $\frac{1}{\|y\|^m}$über $\{y : \| y \| \geq R\}$ integrierbar. Also ist auch $\Pi_{i=1}^m \frac{1}{\|y-a_i\|}$ über $\{y : \| y \| \geq R\}$ integrierbar.

Sei $\epsilon := \frac{1}{2}\, min\{\| a_i - a_j \| : i \neq j\}$ und $A_\epsilon := \cup_{i=1}^m B(a_i, \epsilon)$. Für $y \in A_\epsilon$ gilt dann, dass es ein i_0 mit $\| y - a_{i_0} \| < \epsilon$ gibt, während für alle $j \neq i_0$ nach der Dreiecksungleichung $\| y - a_j \| \geq \| a_{i_0} - a_j \| - \| y - a_{i_0} \| \geq 2\epsilon - \epsilon = \epsilon$ ist.
Es gilt also für alle $y \in B(a_{i_0}, \epsilon)$: $\Pi_{i=1}^m \frac{1}{\|y-a_i\|} \leq \frac{1}{\epsilon^{m-1}} \frac{1}{\|y-a_{i_0}\|}$. Insbesondere ist also

$$\int_{B\left(a_{i_0}, \epsilon\right)} \Pi_{i=1}^m \frac{1}{\| y - a_i \|} d^n y \leq \frac{1}{\epsilon^{m-1}} \int_{B\left(a_{i_0} \epsilon\right)} \frac{1}{\| y - a_{i_0} \|} d^n y =$$

$$\frac{1}{\epsilon^{m-1}} \lim_{r\to 0} \int_r^\epsilon \frac{1}{\rho} \rho^{n-1} d\rho = \frac{1}{\epsilon^{m-1}} \frac{1}{n-1} \epsilon^{n-1}.$$

Da dies für jedes $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ gilt, haben wir $\int_{A_\epsilon} \Pi_{i=1}^m \frac{1}{\|y-a_i\|} d^n y \leq \frac{m}{n-1} \epsilon^{n-m}$.

Ausserdem ist $\overline{B(0,R)} - A_\epsilon$ eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $B(0,R)$, also selbst kompakt. Die stetige Funktion $\Pi_{i=1}^m \| y - a_i \|$ nimmt auf dieser kompakten Menge ihr Minimum M an. Wegen $a_1, \ldots, a_m \notin B(0,R) - A_\epsilon$ ist dieses Minimum positiv: $M > 0$. Es gilt also: $\Pi_{i=1}^m \frac{1}{\|y-a_i\|} \leq \frac{1}{M}$, d.h., $\Pi_{i=1}^m \frac{1}{\|y-a_i\|}$ ist auf dem Kompaktum $B(0,R) - A_\epsilon$ beschränkt und damit integrierbar.
Insgesamt ist $\Pi_{i=1}^m \frac{1}{\|y-a_i\|}$ also auf ganz $\mathbb{R}^n$ integrierbar.