Übungen zu MPIII, Blatt 6- Lösungen

Aufgabe 1.

$$\int_{r\leq\|x\|\leq R} ln \parallel x \parallel d^n x = n\tau_n \int_r^R \ln(\rho)\,\rho^{n-1} d\rho = n\tau_n \left\{ \ln(\rho)\,\frac{\rho^n}{n}\,|_r^R - \int_r^R \frac{1}{n}\rho^{n-1} d\rho \right\}$$

$$= \tau_n \left\{ R^n \ln(R) - r^n \ln(r) - \frac{R^n}{n} + \frac{r^n}{n} \right\}.$$

Aufgabe 2.

$$1_{[0,1]} * 1_{[0,1]}(y) = \int_{\mathbb{R}} 1_{[0,1]}(x)\, 1_{[0,1]}(y-x)\, dx = \int_0^1 1_{[0,1]}(y-x)\, dx = \int_{y-1}^{y} 1_{[0,1]}(z)\, dz.$$

Für $y \notin [0,2]$ folgt $f * f(y) = 0$. Für $0 \leq y \leq 1$ folgt

$$f * f(y) = \int_0^y 1_{[0,1]}(z)\, dz = y$$

und für $1 \leq y \leq 2$ folgt

$$f * f(y) = \int_{y-1}^1 1_{[0,1]}(z)\, dz = 2 - y.$$

Weiterhin ist

$$f * (f * f)(y) = \int_0^1 f * f(y-x)\, dx = \int_{y-1}^y f * f(z)\, dz.$$

Damit erhalten wir $f * f * f(y) = 0$ für $y \notin [0,3]$ sowie: für $0 \leq y \leq 1$ ist

$$f * f * f(y) = \int_0^y z dz = \frac{1}{2} y^2,$$

$$f * f * f(y) = \int_{y-1}^1 z dz + \int_1^y 2 - z dz = \frac{1}{2}\left\{1 - (y-1)^2\right\} + 2y - 2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2} = -y^2 + 3y - \frac{3}{2},$$

für $1 \leq y \leq 2$, sowie für $2 \leq y \leq 3$:

$$f * f * f(y) = \int_{y-1}^2 2 - z dz = 2 - 2(y-1) + \frac{1}{2}(y-1)^2 = \frac{1}{2}y^2 - 3y + \frac{9}{2}.$$

Aufgabe 3.

Für einen Körper konstanter Dichte μ ist $M(K) = \mu Vol(K)$, in unserem Fall also $M(K_1) = \mu \int_{-1}^1 \int_{y^2+z^2\leq r^2} 1 dz dy dx = \mu 2a2\tau_2 \int_0^r \rho d\rho = \mu 2\pi a r^2$ und $M(K_2) = \mu \int_{r^2\leq x^2+y^2+z^2\leq R^2} 1 dz dy dx = \mu 3\tau_3 \int_r^R \rho^2 d\rho = \mu \frac{4}{3}\pi\left(R^3 - r^3\right)$.

Für jeden Punkt $p_0 = (x_0, 0, 0) \in L$ gilt $d(p_0, p)^2 = (x_0 - x)^2 + y^2 + z^2$. Diese Funktion (von x_0) nimmt ihr Minimum für $x = x_0$ an und hat dort den Wert $y^2 + z^2$. Also ist $d((x,y,z), L)^2 = y^2 + z^2$.
Das Trägheitsmoment bzgl. L berechnet sich als
$\Theta(K_1) = \mu \int_{K_1} y^2 + z^2 dx dy dz = \mu \int_{-a}^a 1 dx \int_{y^2+z^2\leq r^2} y^2 + z^2 dy dz = \mu 2a2\tau_2 \int_0^r \rho^2 \rho d\rho = \mu\pi a r^4$ und

$$\Theta(K_2) = \mu \int_{r^2\leq x^2+y^2+z^2\leq R^2} y^2 + z^2 dx dy dz$$

$$= \mu \left\{ \int_0^r \left(\int_{r^2-x^2\leq y^2+z^2\leq R^2-x^2} y^2 + z^2 dz dy \right) dx + \int_r^R \left(\int_{0\leq y^2+z^2\leq R^2-x^2} y^2 + z^2 dz dy \right) dx \right\}$$

$$= \mu 2\tau_2 \left\{ \int_0^r \left(\int_{\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \rho^2 \rho d\rho \right) dx + \int_r^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \rho^2 \rho d\rho \right) dx \right\}$$

$$= \mu 2\tau_2 \left\{ \int_0^r \frac{\left(R^2-x^2\right)^2 - \left(r^2-x^2\right)^2}{4} dx + \int_r^R \frac{\left(R^2-x^2\right)^2}{4} dx \right\}$$

$$= \mu \frac{1}{2}\pi \left\{ \left(R^4 - r^4\right) r + \left(r^2 - R^2\right)\frac{2}{3}r^3 + R^4(R - r) - \frac{2}{3}R^2\left(R^3 - r^3\right) + \frac{1}{5}\left(R^5 - r^5\right) \right\} = \mu \frac{1}{2}\pi \left\{ \frac{8}{15}R^5 - \frac{8}{15}r^5 \right\}$$

$$= \frac{4}{15}\mu\pi\left(R^5 - r^5\right).$$