Übungen zu MPIII

Blatt 5- Lösungen

Aufgabe 1.

a) Die Ungleichung $x^2 \leq -x+2$ ist äquivalent zu $(x-1)(x+2) \leq 0$, besitzt also Lösungen nur für $-2 \leq x \leq 1$. Deshalb ist $Vol(K) = \int_{-2}^{1} \int_{x^2}^{-x+2} 1 dy dx = \int_{-2}^{1} -x+2-x^2 dx = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3 \mid_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$.

b) Wir betrachten die lineare Transformation $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $A(x,y,z) = (ax, by, cz)$. Sei, wie in der Vorlesung, $K^{(3,1)} := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \mid x \mid + \mid y \mid + \mid z \mid \leq 1 \right\}$ der Einheitsball der auf $\mathbb{R}^3$ definierten l^1-Norm. Es gilt natürlich: $(x,y,z) \in K^{(3,1)} \Leftrightarrow \mid x \mid + \mid y \mid + \mid z \mid \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|ax|}{a} + \frac{|by|}{b} + \frac{|cz|}{c} \leq 1 \Leftrightarrow A(x,y,z) \in K_2$, d.h., A bildet $K^{(3,1)}$ bijektiv auf K_2 ab, also $1_{K^{(3,1)}}(x,y,z) = 1_{K_2}(A(x,y,z))$. Aus der Vorlesung wissen wir $Vol\left(K^{(3,1)}\right) = \frac{8\Gamma(2)^n}{\Gamma(4)} = \frac{4}{3}$. Zusammen mit $det(A) = abc$ erhalten wir aus der linearen Transformationsformel:

$$Vol(K_2) = \int_{\mathbb{R}^3} 1_{K_2}(x,y,z)\, dxdydz = \mid det(A) \mid \int_{\mathbb{R}^3} 1_{K_2}(A(x,y,z))\, dxdydz =$$

$$abc \int_{\mathbb{R}^3} 1_{K^{(3,1)}}(x,y,z)\, dxdydz = abcVol\left(K^{(3,1)}\right) = \frac{4}{3}abc.$$

Aufgabe 2.

Für jedes $x \in [a,b]$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} 1_K(x,y,z)\, dydz = Vol\left(\left\{(y,z) : y^2 + z^2 \leq f(x)^2\right\}\right) = \pi f(x)^2,$$

denn bekanntlich ist das Volumen einer Kreisscheibe vom Radius R gerade πR^2. Mit dem Cavalierischen Prinzip folgt die Behauptung.

Aufgabe 3.

a) Sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert wie folgt: $f_n(x) = 0$ für $\mid x \mid \geq 2n+1$, $f_n(x) = 1- \mid x \mid$ für $\mid x \mid \leq 1$, $f_n(x) = \frac{1}{2^{m-1}}(1- \mid x - 2m \mid)$ für $x \in [2m-1, 2m+1], m \in \mathbb{Z}$, $f_n(x) = \frac{1}{2^{m-1}}(1- \mid x+2m \mid)$ für $x \in [-2m-1, -2m+1], m \in \mathbb{Z}$. Wegen $f_n(2m+1) = 0$ ist f_n wohldefiniert und stetig. Es hat kompakten Träger enthalten in $[-2n-1, 2n+1]$.

Sei $\epsilon > 0$ gegeben, dann wähle N so dass $\frac{1}{2^{N-1}} < \epsilon$. Für $n > m > N$ gilt dann:
$f_n(x) - f_m(x) = 0$ für $\mid x \mid \leq 2m+1$ oder $\mid x \mid \geq 2n+1$, sowie $\mid f_n(x) - f_m(x) \mid = \mid f_n(x) \mid \leq \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{N-1}} < \epsilon$ für $2m+1 \leq \mid x \mid \leq 2n+1$. Insgesamt also $\parallel f_n - f_m \parallel_\infty < \epsilon$ für alle $n > m > N$. Also ist $\{f_n\}$ Cauchy.

Würde f_n gegen $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ konvergieren, so gälte insbesondere $f(x) = \lim f_n(x)$ für alle x. Es gilt $f_n(2m) = \frac{1}{2^{m-1}}$ für alle $n > m$, also $f(2m) = \frac{1}{2^{m-1}}$. Hätte f kompakten Träger, so existierte R mit $f(x) = 0$ für $x > R$.

b) Sei f_n eine Cauchy-Folge in $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$. Zu gegebenem $\epsilon > 0$ gibt es dann ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $\parallel f_n - f_m \parallel_\infty < \epsilon$ für alle $n, m > N$ gilt. Insbesondere also $\mid f_n(x) - f_m(x) \mid < \epsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weil $\mathbb{R}$ ein Banachraum ist, existiert also für jedes x eine konvergente Teilfolge $\{f_{n_k}(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$. Sei $f(x)$ ihr Grenzwert. Dann gilt, dass $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ (und nicht nur eine Teilfolge) gegen $f(x)$ konvergiert. (Nämlich, für hinreichend große $n_k > N$ und beliebige $m > N$ ist $\mid f_m(x) - f(x) \mid \leq \mid f_m(x) - f_{n_k}(x) \mid + \mid f_{n_k}(x) - f(x) \mid < 2\epsilon$.)

Für $n, m > N$ ist $\mid f_n(x) - f_m(x) \mid < \epsilon$, also $\mid f_n(x) - f(x) \mid = \mid f_n(x) - \lim f_m(x) \mid = \lim \mid f_n(x) - f_m(x) \mid \leq \epsilon$ für alle x. Also, für $n > N$, haben wir $\parallel f_n - f \parallel_\infty \leq \epsilon$, d.h., f_n konvergiert gleichmässig gegen f.

Damit ist f stetig. Ausserdem gilt $\mid f(x) \mid \leq \mid f_n(x) - f(x) \mid + \mid f_n(x) \mid \leq \parallel f_n - f \parallel_\infty + \parallel f_n \parallel_\infty < \parallel f_n \parallel_\infty + \epsilon$ für ein beliebiges, fest gewähltes, $n > N$. Also ist f beschränkt.