Übungen zu MPIII

Blatt 4- Lösungen

Aufgabe 1.

Wir berechnen zunächst die Fourierkoeffizienten von f. Es ist $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \pi$ und, für $k \geq 1$,

$$\pi b_k = \int_0^\pi x \sin kx dx + \int_\pi^{2\pi} (2\pi - x) \sin kx dx$$
$$= -\frac{x}{k}\cos kx \,|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{k}\cos kx dx - \frac{2\pi - x}{k}\cos kx \,|_\pi^{2\pi} - \int_\pi^{2\pi} \frac{1}{k}\cos kx dx$$
$$= \frac{1}{k}\int_0^\pi \cos kx dx - \frac{1}{k}\int_\pi^{2\pi} \cos kx dx$$
$$= \frac{1}{k^2}\sin kx \,|_0^\pi - \frac{1}{k^2}\sin kx \,|_\pi^{2\pi} = 0$$

und

$$\pi a_k = \int_0^\pi x \cos kx dx + \int_\pi^{2\pi} (2\pi - x) \cos kx dx$$
$$= \frac{x}{k}\sin kx \,|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{k}\sin kx dx + \frac{2\pi - x}{k}\sin kx \,|_\pi^{2\pi} + \int_\pi^{2\pi} \frac{1}{k}\sin kx dx$$
$$= -\frac{1}{k}\int_0^\pi \sin kx dx + \frac{1}{k}\int_\pi^{2\pi} \sin kx dx$$
$$= \frac{1}{k^2}\cos kx \,|_0^\pi - \frac{1}{k^2}\cos kx \,|_\pi^{2\pi}$$
$$= \frac{2\cos k\pi - 2}{k^2} = \frac{2(-1)^k - 2}{k^2}.$$

Also ist $a_k = 0$ falls k gerade und $a_k = -\frac{4}{\pi k^2}$ falls k ungerade. Die Fourier-Reihe von f ist also

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}.$$

Weil f stetig und stückweise stetig differenzierbar ist, konvergiert die Fourier-Reihe punktweise (sogar gleichmässig) gegen f. Das zeigt a). Insbesondere haben wir, wegen $f(0) = 0$, die Identität $0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}$, woraus b) folgt.

Sei $F : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ für $0 \leq x \leq \pi$ und $F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2\pi x - \pi^2$ für $\pi \leq x \leq 2\pi$. F ist stückweise stetig differenzierbar mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [0, 2\pi]$. Weil die Reihe $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^\infty \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$ gleichmässig konvergiert, können wir sie gliedweise integrieren und erhalten

$$F(x) + C = \frac{\pi}{2}x - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}.$$

Wegen $F(0) = 0$ und $\sin(0) = 0$ muss $C = 0$ sein. Durch Umstellen erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}x - F(x)\right).$$

Wegen $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{8}\pi^2$ und $\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n$ folgt daraus

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{8}\right) = \frac{\pi^3}{32}$$

Aufgabe 2.

Sei $g_N = \sum_{n=-N}^{N} \gamma_n e^{inx}$ für $N \in \mathbb{N}$.

Für beliebige n, N mit $N \geq \mid n \mid$ gilt:

$$\mid \gamma_n - < e^{inx}, f > \mid = \mid < e^{inx}, g_N > - < e^{inx}, f > \mid = \mid < e^{inx}, g_N - f > \mid .$$

Wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist

$$\mid < e^{inx}, g_N - f > \mid \leq \parallel e^{inx} \parallel_2 \parallel g_N - f \parallel_2 = \parallel g_N - f \parallel_2 .$$

Wegen der vorausgesetzten Konvergenz im quadratischen Mittel ist

$$\lim_{N\to\infty} \parallel g_N - f \parallel_2 = 0,$$

also auch $\lim_{N\to\infty} \mid \gamma_n - < e^{inx}, f > \mid = 0$. Da aber $\mid \gamma_n - < e^{inx}, f > \mid$ von N überhaupt nicht abhängt (für $N \geq \mid n \mid$), ist $\gamma_n - < e^{inx}, f > = 0$, was zu beweisen war.

Aufgabe 3.

Sei $g_N := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x+n\alpha)$. Aus $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ folgt

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x+n\alpha) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} c_0 + \sum_{k\neq 0} c_k e^{ikx}\left(e^{ik\alpha}\right)^n$$

$$= c_0 + \sum_{k\neq 0} \frac{1}{N} c_k \sum_{n=1}^{N} \left(e^{ik\alpha}\right)^n e^{ikx}.$$

Wenn $\frac{\alpha}{\pi}$ irrational ist, dann ist (für beliebige $k \in \mathbb{Z}$) $k\alpha$ kein ganzzahliges Vielfaches von 2π, also $e^{ik\alpha} \neq 1$. Also können wir die Identität $\left(1 - e^{ik\alpha}\right)\sum_{n=1}^{N}\left(e^{ik\alpha}\right)^n = e^{ik\alpha} - \left(e^{ik\alpha}\right)^{N+1}$ durch $\left(1 - e^{ik\alpha}\right)$ dividieren und erhalten $\sum_{n=1}^{N}\left(e^{ik\alpha}\right)^n = \frac{e^{ik\alpha} - \left(e^{ik\alpha}\right)^{N+1}}{1 - e^{ik\alpha}}$, also

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x+n\alpha) = c_0 + \sum_{k\neq 0} \frac{1}{N} c_k \frac{e^{ik\alpha} - \left(e^{ik\alpha}\right)^{N+1}}{1 - e^{ik\alpha}} e^{ikx}.$$

Der k-te Fourierkoeffizient d_k von g_N ist also $d_k = \frac{1}{N} c_k \frac{e^{ik\alpha} - \left(e^{ik\alpha}\right)^{N+1}}{1 - e^{ik\alpha}}$. ($d_k$ ist tatsächlich der Fourierkoeffizient, denn $\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikx}$ konvergiert im quadratischen Mittel gegen $\frac{1}{N} f(x+n\alpha)$, weil Konvergenz im quadratischen Mittel mit endlicher Summenbildung vertauscht.)
Wegen $\mid e^{ik\alpha} \mid = 1$ ist sicher $\mid e^{ik\alpha} - \left(e^{ik\alpha}\right)^{N+1} \mid \leq 2$, also

$$\mid d_k \mid = \mid \frac{1}{N} c_k \frac{e^{ik\alpha} - \left(e^{ik\alpha}\right)^{N+1}}{1 - e^{ik\alpha}} \mid \leq \frac{2}{N} \mid \frac{c_k}{1 - e^{ik\alpha}} \mid \longrightarrow_{N\to\infty} 0,$$

d.h., bis auf $d_0 = c_0$ konvergieren alle Fourierkoeffizienten von g_N gegen Null. (Ausserdem gilt nach Voraussetzung $c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$.)
