Übungen zu MPIII

Blatt 3- Lösungen

Aufgabe 1.

a) Es ist $\| f \|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} | f(x) |^2 \, dx \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(sup\{| f(y) | : 0 \leq y \leq 2\pi\}\right)^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \| f \|_{[0,2\pi]}^2 \, dx = \| f \|_{[0,2\pi]}^2$, also $\| f \|_2 \leq \| f \|_{[0,2\pi]}$. Wenn f_n gleichmässig gegen f konvergiert, dann existiert für jedes ϵ ein N so dass $\| f_n - f \|_{[0,2\pi]} < \epsilon$ für alle $n > N$ gilt. Damit gilt dann aber auch $\| f_n - f \|_2 < \epsilon$ für alle $n > N$, also konvergiert f_n im quadratischen Mittel gegen f.

b) Sei $f_n(x) = \left(\frac{x}{2\pi}\right)^n$. Dann ist $2\pi \| f_n \|_2^2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2n}\int_0^{2\pi} x^{2n} dx = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2n+1}$, also konvergiert f_n im quadratischen Mittel gegen Null. Da aber $f_n(2\pi) = 1$ für alle n, konvergiert f_n nicht punktweise gegen Null.

Aufgabe 2.

Sei $f : [0, 2\pi]$ definiert durch $f(x) = 1$ für $x < \pi$ und $f(x) = -1$ für $x \geq \pi$.

Die Fourier-Koeffizienten berechnen sich wie folgt:

$$2\pi a_0 = \int_0^{2\pi} f(x) \, dx = \int_0^{\pi} 1 dx + \int_{\pi}^{2\pi} -1 dx = \pi - \pi = 0$$

und, für $k \neq 0$,

$$\pi a_k = \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx = \int_0^{\pi} \cos kx dx + \int_{\pi}^{2\pi} - \cos kx dx = 0 + 0 = 0,$$

$$\pi b_k = \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx = \int_0^{\pi} \sin kx dx + \int_{\pi}^{2\pi} - \sin kx dx = -\frac{1}{k}(\cos k\pi - 1) + \frac{1}{k}(1 - \cos k\pi)$$
$$= \frac{2 - 2\cos k\pi}{k} = \frac{2 - 2(-1)^k}{k}.$$

Falls k eine gerade Zahl ist, ist also $b_k = 0$. Falls $k = 2n+1$ eine ungerade Zahl ist, dann ist $b_k = \frac{1}{\pi}\frac{4}{k}$. Also ist die Fourier-Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

Die Parsevalgleichung (Anwesenheitsaufgabe 1) gibt dann

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} | b_{2n+1} |^2 = \| f \|_2^2 = 1.$$

Also $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 2\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}$.

Aufgabe 3.

Betrachte

$$Q_k(t) := c_k \left(\frac{1 + \cos t}{2}\right)^k,$$

wobei wir $c_k := \frac{2\pi}{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k dt}$ so wählen, dass $\int_{-\pi}^{\pi} Q_k(t) \, dt = 2\pi$ ist.

Q_k ist ein Produkt von trigonometrisches Polynomen. Mit Hausaufgabe 1 von Blatt 2 folgt, dass Q_k ein trigonometrisches Polynom ist.

Es gilt $c_k \leq \frac{\pi(k+1)}{2}$. Nämlich, wir haben $2\pi = c_k \int_{-\pi}^{\pi} Q_k(t)\, dt$ und damit, weil ja $Q_k(-t) = Q_k(t)$ gilt, $\pi = c_k \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k dt$. Mit $\sin t \leq 1$ für $0 \leq t \leq \pi$ sowie der Substitution $u = \frac{1+\cos t}{2}$ bekommen wir dann die Ungleichungskette

$$1 = \frac{c_k}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k dt \geq \frac{c_k}{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k \sin t dt$$

$$= \frac{c_k}{\pi} \int_0^1 u^k du = c_k \frac{2}{\pi(k+1)}$$

und damit die behauptete Ungleichung.

Sei $0 < \delta < \pi$, dann konvergiert $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ gleichmässig auf $[-\delta, \pi - \delta]$. Nämlich, für $t \in [-\delta, \pi - \delta]$ gilt

$$Q_k(t) \leq Q_k(\delta) = c_k \left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^k \leq \frac{\pi(k+1)}{2} \left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^k$$

und, wegen $0 < \frac{1+\cos\delta}{2} < 1$, konvergiert der letzte Ausdruck gegen 0 für $k \to \infty$.

Wir setzen f zu einer 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ fort und definieren

$$P_k(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)\, Q_k(s)\, ds.$$

Mit der Substitution $u = t - s$ sieht man $P_k(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{t+\pi}^{t-\pi} f(u)\, Q_k(t-u)\, du$
$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(u)\, Q_k(t-u)\, du = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi+t} f(u)\, Q_k(t-u)\, du + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+t} \pi f(u)\, Q_k(t-u)\, du$
$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\pi+t} f(u)\, Q_k(t-u)\, du + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+t}^{\pi} f(u)\, Q_k(t-u)\, du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, Q_k(t-u)\, du$, wobei die vorletzte Gleichheit gilt, weil f und Q_k 2π-periodisch sind.

Weil Q_k ein trigonometrisches Polynom $Q_k(t-u) = \sum_n c_n e^{in(t-u)}$ ist, ist dann auch

$$P_k(t) = \sum_n \left(\frac{c_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, e^{-inu} du\right) e^{int}$$

ein trigonometrisches Polynom.

Weil f auf dem kompakten Intervall $[-\pi, \pi]$ gleichmässig stetig ist, können wir zu vorgegebenem ϵ ein δ finden, so dass $\mid x - y \mid < \delta \Longrightarrow \mid f(x) - f(y) \mid < \frac{\epsilon}{2}$ gilt. Dann ist

$$\mid P_k(t) - f(t) \mid = \frac{1}{2\pi} \mid \int_{-\pi}^{\pi} (f(t-s) - f(t))\, Q_k(s)\, ds \mid$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \mid \int_{\mid s \mid < \delta, \mid s \mid > \pi - \delta} (f(t-s) - f(t))\, Q_k(s)\, ds \mid + \frac{1}{2\pi} \mid \int_{\delta \leq \mid s \mid \leq \pi\delta} (f(t-s) - f(t))\, Q_k(s)\, ds \mid$$

$$< \frac{1}{2\pi} \int_{\mid s \mid < \delta} \frac{\epsilon}{2} Q_k(s)\, ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq \mid s \mid \leq \pi - \delta} 2 \sup(f)\, Q_k(s)\, ds$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{sup(f)}{\pi} \int_{[-\pi+\delta, -\delta] \cup [\delta, \pi-\delta]} Q_k(s)\, ds.$$

Wegen $Q_k(s) \longrightarrow 0$ gleichmässig auf $[-\pi + \delta, -\delta] \cup [\delta, \pi - \delta]$ wird der zweite Summand kleiner als $\frac{\epsilon}{2}$ für hinreichend grosse k. Also ist für hinreichend grosse k: $\mid P_k(t) - f(t) \mid < \epsilon$.

Bemerkung: Die Bedingung $f(-\pi) = f(\pi)$ ist notwendig.
