Übungen zu MPIII

Blatt 2- Lösungen

Aufgabe 1. Wir schreiben der Einfachheit halber $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ und $g(x) = \sum_{l=1}^{\infty} c_l \cos lx + d_l \sin lx$ mit $a_k = b_k = c_l = d_l = 0$ für $k > n, l > m$. (Da es sich um endliche Summen handelt, brauchen wir Konvergenzfragen nicht zu diskutieren.) Es ist

$$fg(x) = \sum_{k,l} a_k c_l \cos kx \cos lx + b_k d_l \sin kx \sin lx + a_k d_l \cos kx \sin lx + b_k c_l \sin kx \cos lx$$

$$= \sum_{k,l} \frac{a_k c_l + b_k d_l}{2} (\cos kx \cos lx + \sin kx \sin lx) + \frac{a_k c_l - b_k d_l}{2} (\cos kx \cos lx - \sin kx \sin lx) +$$

$$+ \frac{a_k d_l + b_k c_l}{2} (\cos kx \sin lx + \sin kx \cos lx) + \frac{a_k d_l - b_k c_l}{2} (\cos kx \sin lx - \sin kx \cos lx)$$

$$= \sum_{k,l} \frac{a_k c_l + b_k d_l}{2} \cos(k-l)x + \frac{a_k c_l - b_k d_l}{2} \cos(k+l)x + \frac{a_k d_l + b_k c_l}{2} \sin(k+l)x + \frac{a_k d_l - b_k c_l}{2} \sin(k-l)x$$

$$= \sum_m \sum_{l \leq m} \left(\frac{a_{l+m} c_l + b_{l+m} d_l}{2} + \frac{a_{m-l} c_l - b_{m-l} d_l}{2} \right) \cos mx + \left(\frac{a_{m-l} d_l + b_{m-l} c_l}{2} + \frac{a_{l+m} d_l - b_{l+m} c_l}{2} \right) \sin mx.$$

Aufgabe 2.

Wir diskutieren zunächst den Fall, dass f und g Treppenfunktionen bzgl. der selben Unterteilung sind, d.h. wir haben $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 2\pi$ und komplexe Zahlen $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n$, so dass $f(x) = f_i, g(x) = g_i$ für $x \in (x_{i-1}, x_i)$ ist. Dann ist

$$2\pi \parallel f + g \parallel_2^2 = \int_0^{2\pi} | f(x) + g(x) |^2 \, dx = \sum_{i=1}^{n} | f_i + g_i |^2 | x_i - x_{i-1} | = \sum_{i=1}^{n} | \left(f_i \sqrt{x_i - x_{i-1}}\right) + \left(g_i \sqrt{x_i - x_{i-1}}\right) |^2 .$$

Mit der Minkowski-Ungleichung (im $\mathbb{C}^{n^2}$) erhält man

$$\left(\sum_{i=1}^{n} | \left(f_i \sqrt{x_i - x_{i-1}}\right) + \left(g_i \sqrt{x_i - x_{i-1}}\right) |^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} | f_i \sqrt{x_i - x_{i-1}} |^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} | g_i \sqrt{x_i - x_{i-1}} |^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Auf der rechten Seite steht $\sqrt{2\pi} \parallel f \parallel_2 + \sqrt{2\pi} \parallel g \parallel_2$ und wir erhalten die behauptete Ungleichung.

Seien nun f, g (und damit auch $f + g$) beliebige Riemann-integrierbare Funktionen. Bekanntlich gibt es zu jeder Riemann-integrierbaren Funktion f und zu jedem $\epsilon' > 0$ ein $\delta_f > 0$ so dass gilt: für jede Unterteilung $[0, 2\pi] = \cup_{i=0}^{k} [x_i, x_{i+1}]$ mit $| x_{i+1} - x_i | < \delta$ für $i = 0, \ldots, k-1$ gilt : $| \int_0^{2\pi} f(x) - \int_0^{2\pi} \overline{f}(x) \, dx | < \epsilon'$ wobei $\overline{f}$ die Treppenfunktion mit $\overline{f}(x) = f(x_i)$ für alle $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ist. (Wir wählen die Bezeichnung δ_f um klarzumachen, dass δ_f von f abhängt.) Sei nun $\delta = min\left\{\delta_{|f|^2}, \delta_{|g|^2}, \delta_{|f+g|^2}\right\}$, dann gilt also für jede Unterteilung der Feinheit $\leq \delta$, dass $| \int_0^{2\pi} | f |^2 - \int_0^{2\pi} | \overline{f} |^2 | < \epsilon'$, $| \int_0^{2\pi} | g |^2 - \int_0^{2\pi} | \overline{g} |^2 | < \epsilon'$ und $| \int_0^{2\pi} | f + g |^2 - \int_0^{2\pi} | \overline{f} + \overline{g} |^2 | < \epsilon'$ ist. Wegen der (punktweisen) Stetigkeit der Wurzelfunktion finden wir zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\epsilon' > 0$ so dass (zu festem f) aus $| \int_0^{2\pi} | f |^2 - \int_0^{2\pi} | \overline{f} |^2 | < \epsilon'$ folgt: $| \left(\int_0^{2\pi} | f |^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\int_0^{2\pi} | \overline{f} |^2\right)^{\frac{1}{2}} | < \epsilon$. Analog (eventuell mit noch verkleinertem ϵ') für g und $f + g$ anstelle f. Damit erhalten wir also für Unterteilungen der Feinheit $\leq \delta$: $\left(\int_0^{2\pi} | f |^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\int_0^{2\pi} | \overline{f} |^2\right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon$, d.h.

$$\parallel f \parallel_2 - \parallel \overline{f} \parallel_2 < \sqrt{2\pi}\epsilon,$$

analog für g und $f+g$:

$$\| g \|_2 - \| \overline{g} \|_2 < \sqrt{2\pi}\epsilon, \| f+g \| - \| \overline{f}+\overline{g} \|_2 < \sqrt{2\pi}\epsilon.$$

Zusammen mit den oben bewiesenen Ungleichungen für Treppenfunktionen folgt aus der Dreiecksungleichung:

$$\| f+g \|_2 < \| f \|_2 + \| g \|_2 + 3\sqrt{2\pi}\epsilon.$$

Weil wir ϵ beliebig klein wählen können, folgt die Behauptung.

Aufgabe 3.

Es ist $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{(x-\pi)^4}{48} |_0^{2\pi} = 0$, also $a_0 = 0$. Sei im folgenden $k \neq 0$.
Partielle Integration gibt

$$\int_0^{2\pi} \frac{x-\pi}{2} \sin kx dx = -\frac{1}{k}\frac{x-\pi}{2}\cos kx \,|_0^{2\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cos kx dx = -\frac{\pi}{k}$$

wegen $\int_0^{2\pi} \cos kx dx = 0$. Analog

$$\int_0^{2\pi} \frac{x-\pi}{2} \cos kx dx = \frac{1}{k}\frac{x-\pi}{2}\sin kx \,|_0^{2\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\sin kx dx = 0.$$

Erneute partielle Integration gibt

$$\int_0^{2\pi} \frac{(x-\pi)^2}{4} \sin kx dx = -\frac{1}{k}\frac{(x-\pi)^2}{4}\cos kx dx \,|_0^{2\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\frac{x-\pi}{2}\cos kx dx = 0$$

und

$$\int_0^{2\pi} \frac{(x-\pi)^2}{4} \cos kx dx = \frac{1}{k}\frac{(x-\pi)^2}{4}\sin kx \,|_0^{2\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\frac{x-\pi}{2}\sin kx dx = \frac{\pi}{k^2}.$$

Schliesslich

$$\int_0^{2\pi} \frac{(x-\pi)^3}{12} \cos kx dx = \frac{1}{k}\frac{(x-\pi)^3}{12}\sin kx \,|_0^{2\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\frac{(x-\pi)^2}{4}\sin kx dx = 0$$

und

$$\int_0^{2\pi} \frac{(x-\pi)^3}{12} \sin kx dx = -\frac{1}{k}\frac{(x-\pi)^3}{12}\cos kx \,|_0^{2\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\frac{(x-\pi)^2}{4}\cos kx dx = -\frac{\pi^3}{6k} + \frac{\pi}{k^3}.$$

Somit erhalten wir, dass die Fourierreihe von $\frac{(x-\pi)^3}{12}$ die trigonometrische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^3} - \frac{\pi^2}{6k}\right) \sin kx$$

ist. Da wir oben gezeigt hatten, dass $\frac{x-\pi}{2}$ die Fourierreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\pi}{k} \sin kx$ hat, ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \sin kx$ gerade die Fourierreihe von $\frac{(x-\pi)^3}{12} - \frac{\pi^2}{6}\frac{x-\pi}{2}$.
