Übungen zu MP III (Analysis III für Physiker)

Blatt 11 - Lösungen

Aufgabe 1.

$\int_{\mathbb{D}^2} < F, d\nu >= \int_{\mathbb{D}^2} < \left(x^2+z^2, y^2-z^2, x^2+y^2+z^2\right), (0,0,1) >= \int_{\mathbb{D}^2} x^2+y^2+z^2 dxdy$
$= \int_{\mathbb{D}^2} x^2+y^2 dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 r dr d\phi = 2\pi \frac{r^4}{4} \mid_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 2.

a) Der Normalenvektor an die Sphäre ist $\nu(x,y,z) = (x,y,z)$, damit $< (x,y,z), \nu(x,y,z) >= \mid (x,y,z) \mid^2 = 1$. Also ist $< (x,y,z), d\nu >= dA$ und mit Anwesenheitsaufgabe 2a) gilt
$Vol_3(B) = \frac{1}{3} \int_{\partial B} < (x,y,z), \nu(x,y,z) > dA = \frac{1}{3} \int_{\partial B} 1 dA = \frac{1}{3} Vol_2(\partial B)$.

b) Parametrisiere die Oberfläche ∂B durch

$$\Phi : [0,2\pi] \times [0,2\pi] \to \partial B$$

$$(\theta, \tau) \longrightarrow ((a+b\cos\tau)\cos\theta, (a+b\cos\tau)\sin\theta, b\sin\tau).$$

Dann ist $\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = (-(a+b\cos\tau)\sin\theta, (a+b\cos\tau)\cos\theta, 0)$ und $\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} = (-b\sin\tau\cos\theta, -b\sin\tau\sin\theta, b\cos\tau)$, woraus man den Normalenvektor $\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\tau} = ((a+b\cos\tau)\, b\cos\tau\cos\theta, (a+b\cos\tau)\, b\cos\tau\sin\theta, (a+b\cos\tau)\, b\sin\tau)$ berechnet. Mit Anwesenheitsaufgabe 2b) ergibt sich

$$Vol_3(B) = \int_{\partial B} < (0,0,z), \nu(x,y,z) > dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} b\sin\tau.\,(a+b\cos\tau)\, b\sin\tau d\tau d\theta$$

$$= 2\pi b^2 a \int_0^{2\pi} \sin^2\tau + 2\pi b^3 \int_0^{2\pi} \sin^2\tau\cos\tau d\tau = 2\pi^2 a b^2,$$

wobei wir $\int_0^{2\pi} \sin^2\tau d\tau = \pi$ und $\int_0^{2\pi} \sin^2\tau\cos\tau d\tau = \int_0^{2\pi} \cos\tau d\tau - \int_0^{2\pi} \cos^3\tau d\tau = 0$ benutzt haben.

Aufgabe 3.

a) Parametrisiere A mittels

$$\Phi : [0,2\pi] \times [a,b] \to A$$

$$(\theta, z) \longrightarrow (f(z)\cos\theta, f(z)\sin\theta, z).$$

Dann ist $\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = (-f(z)\sin\theta, f(z)\cos\theta, 0)$ und $\frac{\partial\Phi}{\partial z} = (f'(z)\cos\theta, f'(z)\sin\theta, 1)$. Das Kreuzprodukt ist

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \times \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \left(f(z)\cos\theta, f(z)\sin\theta, -f'(z) f(z) \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\right)$$

mit Normquadrat

$$\mid \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \times \frac{\partial\Phi}{\partial z} \mid^2 = f(z)^2\cos^2\theta + f(z)^2\sin^2\theta + f'(z)^2 f(z)^2 = f(z)^2 \left(1 + f'(z)^2\right).$$

Also

$$Vol_2(A) = \int_A \mid \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \times \frac{\partial\Phi}{\partial z} \mid dz d\theta = 2\pi \int_a^b f(z) \sqrt{1+f'(z)^2} dz.$$

b) $Vol_2(A) = 2\pi \int_0^h ax\sqrt{1+a^2} dx = \pi a \sqrt{1+a^2} h^2$.