Übungen zu MP III (Analysis III für Physiker) Blatt 10 - Lösungen

Aufgabe 1.
Es genügt, den Fall zu betrachten, dass $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stetig differnzierbare Kurve ist. Dann ist $\mid \gamma' \mid$ beschränkt. Ausserdem konvergiert nach Annahme $\| f_n - f \|_{\gamma([a,b])}$ gegen 0. Es gilt

$$\mid f_n(\gamma(t))\gamma'(t) - f(\gamma(t))\gamma'(t) \mid \leq \mid f_n(t) - f(t) \mid \| \gamma' \|_{[a,b]} \leq \| f_n - f \|_{\gamma([a,b])} \| \gamma' \|_{[a,b]},$$

also konvergiert $f_n(\gamma(t))\gamma'(t)$ gegen $f(\gamma(t))\gamma'(t)$. Die Konvergenz ist gleichmässig weil $[a,b]$ kompakt ist. Deshalb konvergiert $\int_a^b f_n(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$ gegen $\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$, d.h., $\int_\gamma f_n(z)\,dz$ konvergiert gegen $\int_\gamma f(z)\,dz$.

Aufgabe 2.
Angenommen, $P(z)$ hat keine Nullstelle. Dann ist $f(z) := \frac{1}{P(z)}$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ definierte holomorphe Funktion. Insbesondere ist $f(z)$ stetig, also auf jedem kompakten Ball $\overline{B(0,R)}$ beschränkt, d.h., es gibt zu jedem $R > 0$ ein $M(R) > 0$ so dass $\mid z \mid \leq R \Longrightarrow \mid f(z) \mid \leq M(R)$ gilt. Es ist

$$f(z) = \frac{1}{P(z)} = \frac{1}{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n} = \frac{1}{z^n} \frac{1}{\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \ldots + a_n},$$

also

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^n} \lim_{z\to\infty} \frac{1}{\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \ldots + a_n} = 0 \frac{1}{a_n} = 0.$$

Zu beliebigem $\epsilon > 0$ finden wir also ein $R > 0$ mit $\mid f(z) \mid < \epsilon$ für alle $\mid z \mid \geq R$. Wählen wir $M = max\{\epsilon, M(R)\}$ dann gilt also $\mid f(z) \mid \leq M$ sowohl für $\mid z \mid \leq R$ als für $\mid z \mid \geq R$, also für alle $z \in \mathbb{C}$.
Damit ist $f(z)$ eine beschränkte holomorphe Funktion, nach dem Satz von Liouville also konstant. Damit wäre auch $P(z)$ konstant. Widerspruch!

Aufgabe 3.
a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi i Res\left(\frac{1}{(1+z^2)^2}, i\right) = 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{d}{dz} \frac{(z-i)^2}{(z^2+1)^2} = 2\pi i \frac{d}{dz} \mid_{z=i} \frac{1}{(z+i)^2} = 2\pi i \frac{-2}{(i+i)^3} = \frac{\pi}{2}$.

b) Es ist

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1} \sin z = \frac{z}{z^2+1} \frac{1}{2i} \left(e^{iz} - e^{-iz}\right).$$

Mit der Substitution $x \to -x$ sieht man, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1} e^{-ix} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1} e^{ix} dx$ ist. Also ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1} \sin x = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1} \frac{1}{2i} e^{ix} dx.$$

Dieses Integral können wir mit Anwesenheitsaufgabe 3b) berechen, es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1} \frac{1}{i} e^{ix} dx = 2\pi i Res\left(\frac{z}{z^2+1} \frac{1}{i} e^{iz}, i\right)$$

$$= 2\pi Res\left(\frac{z}{z^2+1} e^{iz}, i\right) = 2\pi \lim_{z\to i} \frac{z(z-i)}{z^2+1} e^{iz} = 2\pi \lim_{z\to i} \frac{z}{z+i} e^{iz} = 2\pi \frac{i}{2i} e^{-1} = \pi e^{-1}.$$

c) Sei $R > r > 0$. Nach Cauchy's Integralsatz ist $\int_{K_R \cup [-R,-r] \cup -K_r \cup [r,R]} \frac{\sin z}{z} dz = 0$. Also ist

$$\int_{-R}^{-r} \frac{\sin z}{z} dz + \int_r^R \frac{\sin z}{z} dz = \int_{K_r} \frac{\sin z}{z} dz - \int_{K_R} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{1}{2i} \int_{K_r} \frac{e^{iz}}{z} dz - \frac{1}{2i} \int_{K_r} \frac{e^{-iz}}{z} dz - \frac{1}{2i} \int_{K_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \frac{1}{2i} \int_{K_R} \frac{e^{-iz}}{z} dz.$$

Nach Anwesenheitsaufgabe 3a) ist $\lim_{R\to\infty} \int_{K_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$. Mit der Substitution $z \to -z$ folgt, dass auch $\lim_{R\to\infty} \int_{K_R} \frac{e^{-iz}}{z} dz = 0$.
$g(z) := \frac{e^{iz}-1}{z}$ lässt sich durch $g(0) = i$ zu einer stetigen Funktion fortsetzen, deshalb ist $\lim_{r\to 0} \int_{K_r} \frac{e^{iz}-1}{z} = 0$, wie man etwa aus der für alle $r \leq 1$ gültigen Abschätzung $\mid \int_{K_r} g(z)\,dz \mid \leq \pi r \sup\{\mid g(z) \mid : \mid z \mid \leq 1\}$ sieht. Damit ist

$$\lim_{r\to 0} \int_{K_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = \lim_{r\to 0} \int_{K_r} \frac{e^{iz}-1}{z} dz + \lim_{r\to 0} \int_{K_r} \frac{1}{z} dz = \lim_{r\to 0} \int_{K_r} \frac{1}{z} dz = \lim_{r\to 0} \pi i = \pi i$$

und analog $\lim_{r\to 0} \int_{K_r} \frac{e^{-iz}}{z} dz = -\pi i$. Insgesamt also $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{r\to 0, R\to\infty} \int_{-R}^{-r} \frac{\sin x}{x} dx + \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx =$ $\lim_{r\to 0} \left(\frac{1}{2i} \int_{K_r} \frac{e^{iz}}{z} dz - \frac{1}{2i} \int_{K_r} \frac{e^{-iz}}{z} dz\right) + \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{2i} \int_{K_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \frac{1}{2i} \int_{K_R} \frac{e^{-iz}}{z} dz\right) = \pi.$