Math. Institut der Univ. München, K. Ziegler, T. Kuessner 21. September 2002

Übungen zu MPIII

Blatt 1- Lösungen

Aufgabe 1. Wir haben

$$\left| \frac{nx}{1+n^2x^2} \right| \leq \left| \frac{nx}{n^2x^2} \right| = \left| \frac{1}{nx} \right| \longrightarrow_{n\to\infty} 0$$

und deshalb punktweise Konvergenz $\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0$. Andererseits gelten aber folgende Umformungen für jedes $\epsilon > 0$:

$$\frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \epsilon \Longleftrightarrow nx \leq \left(1+n^2x^2\right)\epsilon$$

$$\Longleftrightarrow x \leq \left(\frac{1}{n} + nx^2\right)\epsilon$$

$$\Longrightarrow x \leq \left(1+nx^2\right)\epsilon$$

$$\Longleftrightarrow x - \epsilon \leq nx^2\epsilon \Longleftrightarrow \frac{x-\epsilon}{x^2\epsilon} \leq n.$$

Als Konsequenz: $\frac{x-\epsilon}{x^2\epsilon} > n \Longrightarrow \frac{nx}{1+n^2x^2} > \epsilon$.

Wir fixieren jetzt ein $\epsilon > 0$ beliebig. Dann ist $\lim_{x\to 0} \frac{x-\epsilon}{x^2\epsilon} = \infty$, insbesondere existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{x-\epsilon}{x^2\epsilon} \geq n$. Wie oben gesehen, heisst das aber:

für festes $\epsilon > 0$ existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{nx}{1+n^2x^2} > \epsilon$.

Also konvergiert $\frac{nx}{1+n^2x^2}$ auf $[0,1]$ nicht gleichmässig gegen 0.

Wir fixieren jetzt $q \in (0,1)$ und beweisen gleichmässige Konvergenz auf $[q,1]$.

Wie oben erhalten wir

$$x \leq nx^2\epsilon \Longrightarrow x \leq \left(\frac{1}{n} + nx^2\right)\epsilon$$

$$\Longleftrightarrow \ldots \Longleftrightarrow \frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \epsilon.$$

Zu vorgegebenem ϵ wählen wir $N \in \mathbb{N}$ so dass $N > \frac{1}{q\epsilon}$. Dann ist für alle $n \geq N$ und alle $x \geq q$:

$$nx^2\epsilon \geq \frac{1}{q\epsilon} xq\epsilon = x,$$

woraus also $\frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \epsilon$ folgt.

Aufgabe 2. Sei

$$f(x) = \ln(1+x).$$

Dann ist

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

und (wie man leicht durch vollständige Induktion nachweist):

$$f^k(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}.$$

Die Taylorreihe ist also

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

und das Restglied hat die Form

$$R_{n+1}(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\frac{1}{1+\zeta}\right)^{n+1}$$

mit $\zeta \in [0, x]$.

Für $0 \le x \le 1$ haben wir $\frac{x^{n+1}}{(1+\zeta)^{n+1}} \le 1$ (wegen $x \le 1 \le 1 + \zeta$), also

$$| R_{n+1}(x) | \le \frac{1}{n+1}$$

und damit $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$.

Aufgabe 3. Bekanntlich gilt für $0 \le x < 1$:

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Der verallgemeinerte binomische Satz, mit $\alpha = -\frac{1}{2}$, ergibt für $-1 < t < 1$

$$\left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\Pi_{k=1}^{n} \frac{-\frac{1}{2}-k+1}{k}\right) \left(-t^2\right)^n.$$

(Das heisst, die Funktionenreihe auf der rechten Seite konvergiert gleichmässig gegen $\left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{2}}$.)
Wir benutzen noch, dass $\Pi_{k=1}^{n} \frac{-\frac{1}{2}-k+1}{k} = \Pi_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{2}-k}{k} = (-1)^n \Pi_{k=1}^{n} \frac{k-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^n \Pi_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$ und erhalten also

$$\left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.\ldots 2n-1}{2.4.\ldots 2n} t^{2n}.$$

Wegen Vertauschbarkeit von Limes und Integral bei gleichmässiger Konvergenz (nach Satz 3a konvergieren Potenzreihen auf ihrem Konvergenzkreis gleichmäßig!) folgt, dass wir die Funktionenreihe gliedweise integrieren können. Daraus folgt die Behauptung für $0 \le x < 1$. Indem wir x durch $-x$ ersetzen, erhalten wir die Behauptung auch für $-1 < x \le 0$.

Nach dem Abelschen Grenzwertsatz gilt: wenn eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ auf $(-1, 1)$ gegen eine Funktion f konvergiert und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ existiert, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1-} f(x)$. In unserem Fall gilt, dass die Partialsummen $\sum_{n=0}^{k} a_n = \lim_{x\to 1-} \sum_{n=0}^{k} a_n x^n$ sicher durch $\lim_{x\to 1-} \arcsin x = \arcsin 1$ beschränkt (und monoton wachsend) sind, also konvergieren, und damit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1-} \arcsin x = \arcsin 1$ ist, d.h., die behauptete Gleichung gilt auch für $x = 1$ (und mit der Substitution $x \to -x$ dann auch für $x = -1$.)
