Übungen zu MP III (Analysis III für Physiker)

Blatt 9

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1.
Zeigen Sie, dass man die Funktion

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$$

beliebig oft unter dem Integral differenzieren darf und folgern Sie daraus (ohne Benutzung partieller Integration):

$$n! = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt.$$

Aufgabe 2.
Für $a > 0$ sei $G_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $G_a(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} e^{\frac{-x^2}{2a^2}}$. Zeigen Sie, ohne $G_a * G_b$ explizit zu berechnen, dass, für $a, b > 0$, die Faltung $G_a * G_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert und stetig ist.

Aufgabe 3.
Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Zeigen Sie, dass eine Funktion $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\| f - \phi \|_1 < \epsilon$ und $\| f - \phi \|_2 < \epsilon$ existiert.

Hausaufgaben

Aufgabe 1.
Die Gamma-Funktion ist für $x > 0$ definiert als $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$. Zeigen Sie, dass die Gamma-Funktion (für $x > 0$) beliebig oft differenzierbar ist mit n-ter Ableitung

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} (\ln t)^n \, dt.$$

Aufgabe 2.
a) Zeigen Sie: wenn $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig sind und $f = g$ fast überall, dann ist $f = g$.
b) Zeigen Sie: wenn $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ stetig sind und $\hat{f} = \hat{g}$ ist, dann ist $f = g$.

Aufgabe 3.
a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := e^{-|x|}$. Zeigen Sie, dass $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ und berechnen Sie $\hat{f}$.
b) Für $a > 0$ sei $F_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F_a(x) := \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}.$$

(F_a heisst Dichte der Cauchy-Verteilung zum Parameter a.) Zeigen Sie, dass $\int_{-\infty}^\infty F_a(x)\, dx = 1$.
Benutzen Sie a), um für alle $\xi \in \mathbb{R}$ zu zeigen:

$$\hat{F_a}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a|\xi|}.$$

c) Zeigen Sie, dass, für beliebige $a, b > 0$, $F_a * F_b$ stetig ist.
d) Benutzen Sie b) und c), um $F_a * F_b = F_{a+b}$ zu zeigen.

Die Aufgaben und (nach Abgabeschluss) auch die Lösungen sind im Internet abrufbar unter
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~kuessner/mp3.html .

Abgabe: Montag, 13. Januar, 11.15 Uhr.