# Übungen zu MP III (Analysis III für Physiker)

## Blatt 8

## Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1. Für $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ bezeichne $\tilde{f}$ wieder die triviale Fortsetzung auf $\mathbb{R}$, d.h., $\tilde{f}(x) = f(x)$ für $x \in [0, 2\pi]$ und $\tilde{f}(x) = 0$ sonst. Sei $\mathcal{L}^2[0, 2\pi] := \left\{ f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} : \tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \right\}$.

Für $f \in \mathcal{L}^2[0, 2\pi]$ sei $\| f \|_2 := \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | f(x) |^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$. Man zeige:
a) $\left( \mathcal{L}^2[0, 2\pi], \| \,.\, \|_2 \right)$ ist vollständig,
b) $C[0, 2\pi]$ liegt bzgl. $\| \,.\, \|_2$ dicht in $\mathcal{L}^2[0, 2\pi]$.

Aufgabe 2. Sei $f \in \mathcal{L}^2[0, 2\pi]$. Zeigen Sie:
a) die Fourierkoeffizienten $c_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$ existieren, d.h., $x \to f(x) e^{-ikx}$ ist über $[0, 2\pi]$ integrierbar,
b) die Fourierreihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ konvergiert in $\mathcal{L}^2[0, 2\pi]$ gegen $f$, d.h., $\lim_{n\to\infty} \| \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} - f \|_2 = 0$, und es gilt die Parseval-Gleichung $\| f \|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} | c_k |^2$.

Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass $\mathcal{L}^2[0, 2\pi] \subset \mathcal{L}^1[0, 2\pi]$.

## Hausaufgaben

Aufgabe 1. **Satz von Riesz-Fischer.** Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $\sum_{k=-\infty}^{\infty} | c_k |^2 < \infty$. Beweisen Sie:
a) die Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ konvergiert in $\mathcal{L}^2[0, 2\pi]$,
b) falls $g_1, g_2$ Grenzwerte von $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ in $\mathcal{L}^2[0, 2\pi]$ sind, so ist $g_1(x) = g_2(x)$ für fast alle $x \in [0, 2\pi]$,
c) wenn $g \in \mathcal{L}^2[0, 2\pi]$ Grenzwert von $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ in $\mathcal{L}^2[0, 2\pi]$, dann ist $c_k$ der $k$-te Fourierkoeffizient von $g$.

Aufgabe 2. Sei

$$l^2 := \left\{ (c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \sum_{k\in\mathbb{Z}} | c_k |^2 < \infty \right\}.$$

a) Beweisen Sie, dass $l^2$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist.
b) Sei $L^2[0, 2\pi] = \mathcal{L}^2[0, 2\pi] / \sim$, wobei $f \sim g$ falls $f = g$ fast überall. Beweisen Sie, dass die Abbildung $i : L^2[0, 2\pi] \to l^2$, definiert durch

$$i(f) := \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \right)_{k\in\mathbb{Z}}$$

wohldefiniert und ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen ist.
c) Beweisen Sie, dass $\| c \|_{l^2} := \left( \sum_{k\in\mathbb{Z}} | c_k |^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ für $c = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2$ eine Norm auf $l^2$ ist und dass $i$ eine Isometrie (längentreue Abbildung) ist, d.h., dass für alle $f \in L^2[0, 2\pi]$ gilt:

$$\| i(f) \|_{l^2} = \| f \|_2 \,.$$

d) Beweisen Sie, dass $l^2$ ein Banachraum ist.

Aufgabe 3. Sei $p \geq 1$, $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ und $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Beweisen Sie, dass $f$ über $K$ integrierbar und dass $\int_K | f(x) | \, dx \leq Vol(K)^{1-\frac{1}{p}} \| f \|_p$ ist.

Die Aufgaben und (nach Abgabeschluss) auch die Lösungen sind im Internet abrufbar unter
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~kuessner/mp3.html .

Abgabe: Montag, 16. Dezember, 11.15 Uhr.