Übungen zu MP III (Analysis III für Physiker)

Blatt 7

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1.
Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $g \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. g sei beschränkt, d.h., es existiere $M \in \mathbb{R}$ mit $\mid g(x) \mid \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass das Produkt fg integrierbar ist, d.h., $fg \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 2.
Beweisen oder widerlegen Sie folgenden Satz: wenn $K \subset \mathbb{R}$ kompakt ist und $\{f_k : K \to \mathbb{R}\}$ eine Funktionenfolge, so dass $\mid f_k(x) \mid \leq M$ für ein $M \in \mathbb{R}$ und alle $x \in K, k \in \mathbb{N}$ gilt, dann enthält $\{f_k\}$ eine punktweise konvergierende Teilfolge.

Aufgabe 3.
Sei $\mu : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine lokal integrierbare Funktion mit kompaktem Träger. Man zeige, dass das Newton-Potential zur Ladungsdichte μ existiert, d.h., man beweise für fast alle $y \in \mathbb{R}^3$ die Existenz des Integrals

$$F(y) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mu(x)}{\| x - y \|} d^3x.$$

Hausaufgaben

Aufgabe 1.
Sei $A \subset \mathbb{R}^k$ eine Nullmenge und $B \subset \mathbb{R}^m$ eine beliebeige Menge. Zeigen Sie, dass $A \times B \subset \mathbb{R}^{k+m}$ eine Nullmenge ist.

Aufgabe 2.
Beweisen Sie (ohne das Integral explizit auszurechnen), dass

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^\pi \sin^k(x)\, dx = 0.$$

Aufgabe 3.
Es seien $m > n > 1$ natürliche Zahlen und $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ seien paarweise verschiedene Punkte. Man beweise die Existenz des Integrals

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\Pi_{i=1}^m \| x - a_i \|} d^n x.$$

Hinweise:
Sei $R := 2\, max\{\| a_1 \|, \ldots, \| a_m \|\}$ und $\epsilon := \frac{1}{2}\, min\{\| a_i - a_j \| : i \neq j\}$. Man zerlege $\mathbb{R}^n = A_\epsilon \cup B \cup C_R$, wobei $A_\epsilon = \cup_{i=1}^m B(a_i, \epsilon)$ und $C_R = \mathbb{R}^n - B(0, R)$. Zeigen Sie, dass $\Pi_{i=1}^m \frac{1}{\|x - a_i\|}$ über jede der Mengen A_ϵ, B und C_R integrierbar ist. Wofür braucht man die Bedingungen $n > 1$ und $m > n$?

Die Aufgaben und (nach Abgabeschluss) auch die Lösungen sind im Internet abrufbar unter http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~kuessner/mp3.html .

Abgabe: Montag, 9. Dezember, 11.15 Uhr.