Übungen zu MP III (Analysis III für Physiker)

Blatt 6

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1.
Sei $0 \leq r < R$ und $K \subset \mathbb{R}^4$ gegeben durch $K := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : r \leq \| x \| \leq R\}$. Berechnen Sie die folgenden Integrale:
a) $\int_K e^{-\|x\|^2} d^4x$,
b) $\int_K x_i^2 e^{-\|x\|^2} d^4x, i = 1, 2, 3, 4$.

Aufgabe 2.
Seien $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen. Beweisen Sie:
a) $(f + g) * h = f * h + g * h$,
b) $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Aufgabe 3.
Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte Menge und $\mu : K \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion (die "Dichte" des Körpers K). Die Masse von K ist definiert als

$$M(K) := \int_K \mu(x, y, z)\, dxdydz.$$

Sei weiterhin $L \subset \mathbb{R}^3$ eine Gerade. Für $p \in \mathbb{R}^3$ bezeichne $d(p, L)$ den Abstand von p zur Geraden L (d.h., $d(x, L) = min\{d(p, q) : q \in L\}$). Das Trägheitsmoment von K bzgl. L ist definiert als

$$\Theta(K, L) := \int_K d(p, L)^2 \mu(p)\, dxdydz.$$

Sei L die Gerade $L = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Berechnen Sie die Masse und das Trägheitsmoment bzgl. L für $K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1\right\}$ $(a, b, c > 0$ seien gegeben) mit konstanter Dichte $\mu > 0$.

Hausaufgaben

Aufgabe 1.
Sei $0 < r < R$ und $K \subset \mathbb{R}^n$ gegeben durch $K := \{(x_1, \ldots, x_n) : r \leq \| x \| \leq R\}$. Berechnen Sie $\int_K \ln \| x \| \, d^n x$.

Aufgabe 2.
Es sei $f = 1_{[0,1]}$ die charakteristische Funktion des Einheitsintervalls $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Berechnen Sie explizit die Funktionen $f * f$ und $f * f * f$.

Aufgabe 3.
Sei L die Gerade $L = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Berechnen Sie die Masse und das Trägheitsmoment bzgl. L für folgende kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ mit konstanter Dichte $\mu > 0$:
a) $K_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : | x | \leq a, y^2 + z^2 \leq r^2\right\}$, $(a > 0, r > 0$ sind gegeben),
b) $K_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\right\}$, $(R > r > 0$ sind gegeben).

Die Aufgaben und (nach Abgabeschluss) auch die Lösungen sind im Internet abrufbar unter
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~kuessner/mp3.html .

Abgabe: Montag, 2. Dezember, 11.15 Uhr.