# Übungen zu MP III (Analysis III für Physiker)

Blatt 5

## Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1.
Berechnen Sie das Volumen von $A := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y,z \geq 0, x+y+z \leq \sqrt{2}, x^2+y^2 \leq 1\right\}$.

Aufgabe 2.
Die Parabel $y = 2x^2$ werde um die $y$-Achse rotiert. Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

Aufgabe 3.
Sei

$$\mathcal{C}_c(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ ist stetig und hat kompakten Träger}\}$$

und

$$\mathcal{C}_b(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ ist stetig und beschränkt}\}.$$

Zeigen Sie:
a) $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$,
b) durch $\| f \|_\infty := sup_{x\in\mathbb{R}} \mid f(x) \mid$ wird eine Norm sowohl auf $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ als auf $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ definiert.

## Hausaufgaben

Aufgabe 1.
Berechnen Sie die Volumina folgender Mengen:
a) $K_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq -x+2\right\}$,
b) $K_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{|x|}{a} + \frac{|y|}{b} + \frac{|z|}{c} \leq 1\right\}$, wobei $a,b,c$ gegebene positive Zahlen seien.

Aufgabe 2.
Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und

$$K := \left\{(x,y,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq f(x)^2\right\}.$$

Beweisen Sie:

$$Vol(K) = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

Aufgabe 3.
a) Zeigen Sie: $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ mit der Norm $\| f \|_\infty$ ist kein Banachraum.
b) Zeigen Sie: $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ mit der Norm $\| f \|_\infty$ ist ein Banachraum.
(Bezeichnungen wie in Anwesenheitsaufgabe 3).

Die Aufgaben und (nach Abgabeschluss) auch die Lösungen sind im Internet abrufbar unter
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~kuessner/mp3.html .

Abgabe: Montag, 25. November, 11.15 Uhr.