Übungen zu MP III (Analysis III für Physiker)

Blatt 4

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1.
Man bestimme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4}$ durch gliedweise Integration von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$.

Aufgabe 2.
a) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}$ konvergiere punktweise gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Beweisen Sie: wenn $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n \mid \gamma_n \mid$ konvergiert, dann ist f stetig differenzierbar und $f'(x) = \sum_{n \neq 0} in\gamma_n e^{inx}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei 2-mal stückweise stetig differenzierbar und 2π-periodisch. Beweisen Sie, dass die Fourier-Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} < e^{inx}, f > e^{inx}$ absolut und gleichmässig gegen $f(x)$ konvergiert und dass $\sum_{n=-\infty}^{\infty} in < e^{inx}, f > e^{inx}$ absolut und gleichmässig gegen $f'(x)$ konvergiert. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n \, |< e^{inx}, f >|$ konvergiert.

Aufgabe 3.
Sei $\alpha = \frac{p}{q} 2\pi$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$. Geben Sie ein Beispiel einer 2π-periodischen stückweise differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, für die $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(n\alpha) \neq c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$ ist.

Hausaufgaben

Aufgabe 1.
Es sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x$ für $0 \leq x \leq \pi$ und $f(x) = 2\pi - x$ für $\pi \leq x \leq 2\pi$.
a) Zeigen Sie:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$$

konvergiert absolut und gleichmässig auf $[0, 2\pi]$ gegen f.
b) Folgern Sie: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
c) Bestimmen Sie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}$.
d) Berechnen Sie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Aufgabe 2.
Die Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}$ konvergiere im quadratischen Mittel gegen $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}$ dann die Fourier-Reihe von f ist, d.h., dass $\gamma_n =< e^{inx}, f >$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt.
Hinweis: Cauchy-Schwarz.

Aufgabe 3.
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stückweise stetig differenzierbare 2π-periodische Funktion mit $\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = 0$. Sei α eine reelle Zahl, die kein rationales Vielfaches von π ist. Für alle $N \in \mathbb{N}$ betrachte man

$$g_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x + n\alpha).$$

Beweisen Sie: für $N \to \infty$ konvergieren die Fourierkoeffizienten von g_N gegen Null.
Hinweis: Man beachte, dass die Identität $\sum_{n=1}^{N} \left(e^{ik\alpha}\right)^n = \frac{1-\left(e^{ik\alpha}\right)^{N+1}}{1-e^{ik\alpha}}$ nur für $e^{ik\alpha} \neq 1$ gilt.

Die Aufgaben und (nach Abgabeschluss) auch die Lösungen sind im Internet abrufbar unter
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~kuessner/mp3.html .

Abgabe: Montag, 18. November, 11.15 Uhr.