Math. Institut der Univ. München, K. Ziegler, T. Kuessner 4. November 2002

Übungen zu MP III (Analysis III für Physiker)

Blatt 3

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1.
Sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ und seien $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots \in \mathbb{C}$. Das auf $[0, 2\pi]$ definierte trigonometrische Polynom $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ konvergiere im quadratischen Mittel gegen f. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{4} \mid a_0 \mid^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \mid a_k \mid^2 + \mid b_k \mid^2$ gegen $\| f \|_2^2$ konvergiert.

Aufgabe 2.
Bestimmen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

Aufgabe 3.
1. Weierstrass'scher Approximationssatz. Beweisen Sie: Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{C}$ stetig, dann existiert eine Folge von Polynomen P_n so dass $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$ gleichmässig auf $[-1, 1]$.

Hausaufgaben

Aufgabe 1.
a) Zeigen Sie: wenn eine Folge von Funktionen $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gleichmässig gegen $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ konvergiert, dann konvergiert sie auch im quadratischen Mittel gegen f.
b) Geben Sie eine Folge von Funktionen $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ an, die im quadratischen Mittel konvergiert, aber nicht punktweise konvergiert.

Aufgabe 2.
Bestimmen Sie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Aufgabe 3.
2. Weierstrass'scher Approximationssatz. Beweisen Sie: Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ stetig mit $f(-\pi) = f(\pi)$, dann existiert eine Folge von trigonometrischen Polynomen P_n so dass $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$ gleichmässig auf $[-\pi, \pi]$.
Hinweise: Betrachten Sie $Q_k(t) := c_k \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k$, wobei c_k so gewählt sei, dass $\int_{-\pi}^{\pi} Q_k(t)\, dt = 1$ ist. Zeigen Sie:
- $Q_k(t)$ ist ein trigonometrisches Polynom,
- sei $0 < \delta < \pi$, dann konvergiert $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmässig auf $[-\pi, \delta] \cup [\delta, \pi]$. (Beweisen Sie hierfür zunächst $c_k \leq \frac{\pi(k+1)}{2}$.)

Definieren Sie dann $P_k(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)\, Q_k(s)\, ds$. Mit der Substitution $u = t - s$ kann man leicht zeigen, dass $P_k(t)$ ein trigonometrisches Polynom ist. Wir wollen zeigen, dass für jedes ϵ für hinreichend grosse k $\mid P_k(t) - f(t) \mid = \frac{1}{2\pi} \mid \int_{-\pi}^{\pi} (f(t-s) - f(t))\, Q_k(s)\, ds \mid < \epsilon$ gilt. Zeigen Sie:
- für hinreichend kleine δ und beliebiges k ist $\frac{1}{2\pi} \mid \int_{|s|<\delta} (f(t-s) - f(t))\, Q_k(s)\, ds \mid < \frac{\epsilon}{2}$,
- für beliebige δ und hinreichend grosse k ist $\frac{1}{2\pi} \mid \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} (f(t-s) - f(t))\, Q_k(s)\, ds \mid < \frac{\epsilon}{2}$.

Die Aufgaben und (nach Abgabeschluss) auch die Lösungen sind im Internet abrufbar unter
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~kuessner/mp3.html .

Abgabe: Montag, 11. November, 11.15 Uhr.