Math. Institut der Univ. München, K. Ziegler, T. Kuessner 28. Oktober 2002

Übungen zu MP III (Analysis III für Physiker)

Blatt 2

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1.
Seien $k, l \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos lx dx = \int_0^{2\pi} \sin kx \sin lx dx = 0$$

für $k \neq l$, und

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \sin lx dx = 0$$

für beliebige k, l gilt.

Aufgabe 2.
a) **Cauchy-Schwarz Ungleichung.** Seien $f, g : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbare Funktionen. Beweisen Sie die Ungleichung

$$|< f, g >| \leq \| f \|_2 \| g \|_2 .$$

b) Für eine Riemann-integrierbare Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ definiere man die l^1-Norm durch $\| f \|_1 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | f(x) | dx$. Beweisen Sie, dass $\| f \|_1 \leq \| f \|_2$ gilt.

Aufgabe 3.
Bestimmen Sie die Fourier-Entwicklung der auf $[0, 2\pi]$ definierten Funktion

$$f(x) = \frac{(x-\pi)^2}{4}.$$

Hausaufgaben

Aufgabe 1.
Seien $f, g : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ trigonometrische Polynome, d.h. $f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \cos kx + b_k \sin kx$, $g(x) = \sum_{l=0}^{n} c_l \cos lx + d_l \sin lx$. Zeigen Sie, dass das Produkt fg wieder ein trigonometrisches Polynom ist und drücken Sie seine Koeffizienten durch die Koeffizienten von f und g aus.

Aufgabe 2.
Minkowski Ungleichung. Seien $f, g : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbare Funktionen. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\| f + g \|_2 \leq \| f \|_2 + \| g \|_2 .$$

Aufgabe 3.
Bestimmen Sie die Fourier-Entwicklung der auf $[0, 2\pi]$ definierten Funktion

$$f(x) = \frac{(x-\pi)^3}{12}.$$

Geben Sie eine auf $[0, 2\pi]$ definierte Funktion an, deren Fourier-Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^3}$ ist.

Die Aufgaben und (nach Abgabeschluss) auch die Lösungen sind im Internet abrufbar unter
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~kuessner/mp3.html .

Abgabe: Montag, 4. November, 11.15 Uhr.