Übungen zu MP III (Analysis III für Physiker) Blatt 11

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1.
Zeigen Sie, dass der Quader, die Kugel und der gerade Kreiszylinder C^1-Normalbereiche im $\mathbb{R}^3$ sind.

Aufgabe 2.
a) Sei B ein C^1-Normalbereich bzgl. aller Koordinatenebenen. Beweisen Sie:

$$Vol_3(B) = \frac{1}{3}\int_{\partial B} < (x,y,z), d\nu > .$$

b) Sei B ein C^1-Normalbereich bzgl. der $x-y-$Ebene. Beweisen Sie:

$$Vol_3(B) = \int_{\partial B} < (0,0,z), d\nu > .$$

Aufgabe 3.
Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt und $\Phi : K \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(u,v) := (u, v, \psi(u,v))$$

mit einer C^1-Funktion $\psi : K \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$A(\Phi) = \int_K \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2} dudv.$$

Hausaufgaben

Aufgabe 1.
Berechnen Sie den Fluss des auf $\mathbb{R}^3$ durch $F(x,y,z) := \left(x^2+z^2, y^2-z^2, x^2+y^2+z^2\right)$ definierten Vektorfeldes durch $\mathbb{D}^2 := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 1, z=0\right\}$ in Richtung der positiv orientierten z-Achse.

Aufgabe 2.
a) Sei σ_3 die Oberfläche der 3-dimensionalen Einheitskugel, τ_3 ihr Volumen. Benutzen Sie Anwesenheitsaufgabe 2a), um $\tau_3 = \frac{1}{3}\sigma_3$ zu zeigen.
b) Sei $a > b$ und

$$B := \left\{(x,y,z) : \left(\sqrt{x^2+y^2} - a\right)^2 + z^2 \le b^2\right\}$$

ein **Volltorus**. Benutzen Sie Anwesenheitsaufgabe 2b), um das Volumen von B zu berechnen.

Aufgabe 3.
a) Sei $[a,b]$ ein kompaktes Intervall, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times [a,b] : x^2+y^2 = f(z)^2\right\}$ die zugehörige **Rotationsfläche**. Beweisen Sie:

$$Vol_2(A) = 2\pi \int_a^b f(z)\sqrt{1 + f'(z)^2} dz.$$

b) Sei $a > 0$. Ein Kegel der Höhe h entsteht, indem man die Gerade $y = ax$ um das Teilintervall $[0,h]$ der x-Achse rotieren lässt. Berechnen Sie den Inhalt seiner Mantelfläche.

Die Aufgaben und (nach Abgabeschluss) auch die Lösungen sind im Internet abrufbar unter
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~kuessner/mp3.html .

Abgabe: Montag, 27. Januar, 11.15 Uhr.